

50255

N. 47

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

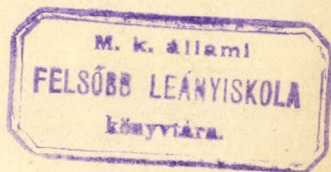
HUSZONNEGYEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGJEJÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és ZEMPLÉN GYÖZÖ

M. N. R. ÁLLAMI A BUDAPESTI
TANÁRI KÖNYVTÁRA
MÁRIA TERÉZIA LEÁNYKÖZNEVELŐISKOLA



BUDAPEST 1915

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

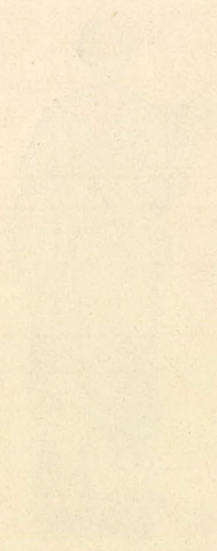
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

~~N.
24
1915~~

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX AND TILDEN FOUNDATIONS

IN THE
NEW YORK
PUBLIC LIBRARY



MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZONNEGYEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első—Második füzet.

HEVESY GYÖRGY: Az atómok szerkezetéről 1. l. — FRÖHLICH KÁROLY: A pörgettyű és mágneses tér befolyásolta fény. 17. l. — BODÓCS ISTVÁN: Indukciós kísérletek a középiskolában. 35. l. — Dr. SCHRODT ISTVÁN: A Gáti-féle barretter segélyével eszközölhető új aërodinamikai mérési eljárás. 53. l. — *Physikai Szemle*: A fémek elektromos vezetőképességéről igen alacsony hőmérsékleteken (RYBÁR). — A Röntgen-sugarak intenzitása és keménysége (KRÖNCKE—GYULAI). — A rádium B lágy γ sugarainak hullámhossza (RUTHERFORD—ANDRADE—KÜSSLER). — A hidrogencsősugarak reflexiója (WAGNER—KÜSSLER). 76—84. l. — *Physikai Laboratium*: Új Röntgen-lámpák (MENDE). — Javítások az ejtőgépen (BODÓCS). 85—92. l. — *Irodalom*: Dr. BATTÁ ISTVÁN: A középiskolai fizikatanítás néhány kérdéséről. (M. S.). 93. l.

Harmadik—Negyedik füzet.

KALUZZSAY KÁROLY: A felületre vonatkozó Jordan-tétel megfordítása. 101. l. — Ifj. SZILY KÁLMÁN: Vizsgálatok az elemi számelmélet köréből. 142. l.

Ötödik—Hatodik füzet.

SZÉLL KÁLMÁN: A gáz energiaingadozása; analogia sugárzási ingadozás és a gáz energiaingadozása között. 159. l. — MIKOLA SÁNDOR: Elektromos tér hatása áramot vivő folyadékhártyákra. 172. l. — *Physikai Szemle*: Az elektron töltésének meghatározására vonatkozó főbb vizsgálatok (MENDE JENŐ). 181. l. — *Physikai Laboratorium*: A Gaede-féle molekuláris és diffúziós légszívó (MENDE JENŐ). 201. l.

Hetedik—Nyolczadik füzet.

JORDAN KÁROLY és FIEDLER RAYMUND: Zárt konvex görbékkel kapcsolatos görbékről. 207. l. — SZÜCS ADOLF: A gömb főköréről, mint legrövidebb vonalakról. 229. l. — PÁL GYULA: Térbeli Jordan-görbékről 236. l. — PÁL GYULA: Weierstrass egy tételének némely általánosításáról. 243. l. — A Matematikai és Fizikai Társulat XXII. rendes közgyűlése. 248. l. — A Matematikai és Fizikai Társulat XXII. tanulóversenye. 253. l. — Előadásainkról. 255. l. — A Matematikai és Fizikai Társulat XXII. tanulóversenyén b. Eötvös Loránd-díjjal jutalmazott dolgozatok: I. Boskovitz Alfréd dolgozata. 256. l. — II. Krbek Ferencz dolgozata. 259. l.

NEVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ

A HUSZONNEGYEDIK KÖTETHEZ.

Önálló és ismertető czikkek.

	Lap
BODÓCS ISTVÁN: Indukciós kísérletek a középiskolában	35
FRÖHLICH KÁROLY: A pörgettyű és mágneses tér befolyásolta fény	17
HEVESY GYÖRGY: Az atómkok szerkezetéről	1
JORDAN KÁROLY ÉS FIEDLER RAYMUND: Zárt konvex görbékkel kapcsolatos görbékről	207
KALUZSAY KÁROLY: A felületre vonatkozó Jordan-tétel megfordítása	101
MIKOLA SÁNDOR: Elektromos tér hatása áramot vivő folyadékhatáryákra	172
PÁL GYULA: Térbeli Jordan-görbékről	236
PÁL GYULA: Weierstrass egy tételének némely általánosításáról	248
SCHRODT ISTVÁN: A Gáti-féle barretter segítségével eszközölhető új aërodinamikai mérési eljárás	53
SZÉLL KÁLMÁN: A gáz energiaingadozása; analógia sugárzási ingadozás és a gáz energiaingadozása között	159
Ifj. SZILY KÁLMÁN: Vizsgálatok az elemi számelmélet köréből	142
SZÜCS ADOLF: A gömb főköréről, mint legrövidebb vonalakról	229

Physikai Szemle.

GYULAI ZOLTÁN: A Röntgen-sugarak intenzitása és keménysége, (H. KRÖNCKE)	78
KÜSSLER ELLY: A radium B lágy γ -sugarainak hullámhossza (E. RUTHERFORD és E. N. Da. C. ANDRADE)	80
KÜSSLER ELLY: A hidrogéncsősugarak reflexiója (E. WAGNER)	83
MENDE JENŐ: Az elektron töltésének meghatározására vonatkozó főbb vizsgálataok	181
RYBÁR ISTVÁN: A fémek elektromos vezetőképességéről igen alacsony hőmérsékleten	76

Physikai Laboratorium.

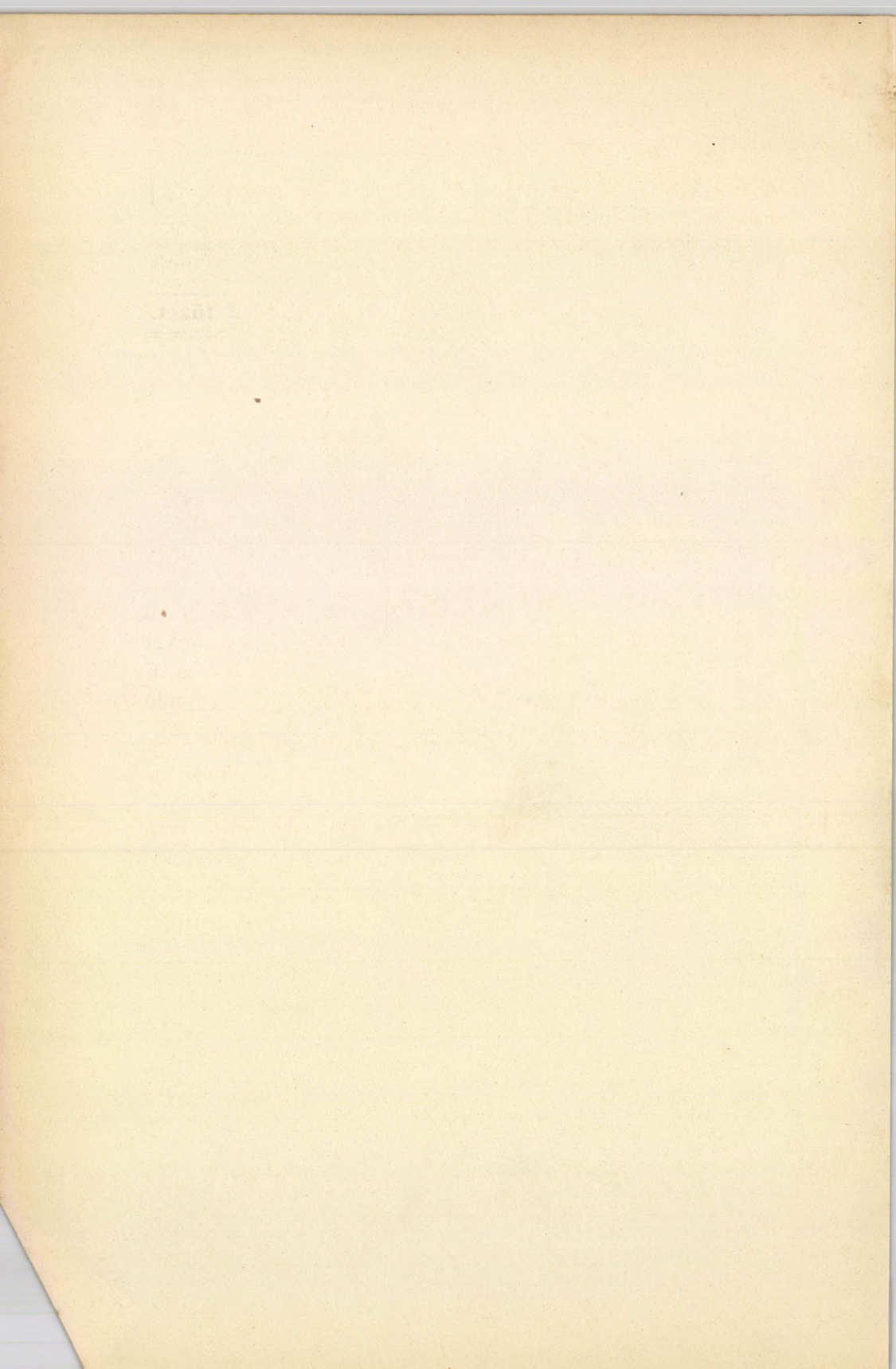
	<i>Lap</i>
BODÓCS ISTVÁN: Javítások az ejtőgépen	89
MENDE JENŐ: Új Röntgen-lámpák	85
MENDE JENŐ: A GAEDE-féle molekuláris és diffúziós légszívó	201

Irodalom.

Dr. BATTÁ ISTVÁN: A középiskolai fizikatanítás néhány kérdéséről (M. S.)	93
---	----

Társulati ügyek. Tanulmányverseny.

Előadásainkról	255
A Matematikai és Physikai Társulat XXII. rendes közgyűlése	248
A Matematikai és Physikai Társulat XXII. tanulmányversenye	253
A Matematikai és Physikai társulat XXII. tanulmányversenyén br. Eötvös Loránd-díjjal jutalmazott dolgozatok:	
I. Boskovitz Alfréd dolgozata	256
II. Krbek Ferencz dolgozata	259



MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három füvnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Matematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

24. évfolyam.

1915, jan.—febr.

1—2. füzet.

AZ ATÓMOK SZERKEZETÉRŐL.

(Befejező közlemény.)¹

8. Az atóмок dimenzióinak kiszámítása Bohr elmélete alapján.

Ha BOHR-ral feltételezzük, hogy az atóm ismert számú elektronjai körpályákon mozognak a fény sebességéhez képest kis sebességgel és hogy minden egyes elektron szögmomentuma, ha a rendszer a permanens helyzetben van, egyenlő $\frac{h}{2\pi}$ -vel, úgy ezáltal meg lesz határozva az atómrendszer konfigurációja, vagyis az egyes gyűrűk lineáris dimenziói és elektronjainak a rezgési száma.

Tekintsük az e töltésű, m tömegű elektront, mely az a sugarú kör kerületén, a fény terjedési sebességéhez képest kis sebességgel mozog és jelöljük az elektrorra ható erőt $\frac{e^2}{a^2} \cdot F$ -el; F függvénye lesz a -nak és a dinamikai egyensúly feltétele az, hogy

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{a^2} \cdot F.$$

A szögmomentum hypothézisünk szerint:

$$mva = \frac{h}{2\pi},$$

¹ Első közlemény Math. és Physikai Lapok 1914 192. l.

ebből

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m} \cdot F^{-1} \quad \text{és} \quad v = \frac{2\pi e^2 \cdot F}{h} \quad (1)$$

és a keringő elektron fordulatainak a száma

$$\omega = \frac{4\pi e^2 m}{h^3} \cdot F^2. \quad (2)$$

Milyen nagy az elektronok kinetikai energiája?

BOHR szerint minden rendszerben, mely pozitív atómmagból és a körül körpályán a fény sebességéhez képest lassan keringő elektrónokból áll, a kinetikai energia fél akkora mint a potenciális energiája vagy másképen kifejezve, ha elképzeljük, hogy egy atóm úgy születik meg, hogy az atómmag végtelen távolságból abba a helyzetbe vonta az elektronokat, hol azután stabilis keringésüket végzik, úgy e közben energia szabadul fel, mely egyenlő a stacionárius helyzetükben keringő elektronok kinetikai energiájával. Jelöljük ezen, illetve az atómnak alkatrészeiből való képződésénél felszabaduló energiát W -vel, úgy

$$W = \Sigma \frac{mv^2}{2} = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^2} \cdot \Sigma F^2 \quad (3)$$

(1), (2) és (3)-ba beléhelyezve

$$\begin{aligned} e &= 4.7 \cdot 10^{-10} \text{ E. S. E.} & \frac{e}{m} &= 5.31 \cdot 10^{17} \text{ és} \\ h &= 6.5 \cdot 10^{-27} \text{ úgy} & \text{úgy: } v &= 2.1 \cdot 10^8 F, \omega = 6.2 \cdot 10^{15} \cdot F^2 \\ a &= 0.55 \cdot 10^{-8} F^{-1}, & \text{és } W &= 2.0 \cdot 10^{-11} \Sigma F^2. \end{aligned}$$

Az atómrendszerek stabilitásának szigorú tárgyalását tartalmazzák BOHR rendkívül érdekes közleményei,¹ valamint annak az esetnek is a tárgyalását, midőn az elektronok keringési sebessége nem törpül el többé a fény terjedési sebessége mellett, midőn « m »-nek a -ban és ω -ban előforduló értéke

¹ Phil. Mag. 1913, júl., szept. és nov.

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c$$

és W -ben előforduló értéke

$$m, \frac{2C^2}{V^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \cdot c$$

helyettesítendő.

9. A hidrogénatóm.

Úgy a diszperziós elméletből, mint az α és β részek sebességcsökkenéséből, miközben ezek hidrogénen áthaladnak, arra következtethetünk, hogy minden hidrogénatomban egy elektron kering, vagyis, hogy a hidrogénatóm áll egy központi egy pozitív töltést hordozó anyagi magból, mely körül körpályán egy elektron kering. Ebből a képből kiindulva sikerült BOHR-nak a hidrogén szinképeit levezetni. Következtetései, mint láttuk volt, fényesen beváltak és így annak további bizonyítékául szolgálnak, hogy a hidrogénatomban egy elektron kering. Milyen távolságra van ezen elektron az atom-központhoz másszóval mi a hidrogénatómnak a sugara? Helyezzünk (1) és (2) képletbe $F = 1$ -et úgy

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m} = 0.55 \cdot 10^{-8} \text{ cm}, \quad \omega = \frac{4\pi^2 e^2 4m}{h^3} = 6.2 \cdot 10^{15}$$

$$W = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^2} = 2.0 \cdot 10^{-11},$$

hol « a » a keresett sugár, ω a fordulatszám és W az energiamennyiség, melyre szükségünk van, hogy az elektront kivigyük a pozitív központ erőteréből, ez illetve $\frac{W}{l}$, a mi voltokban kifejezve 13, nem más, mint a hidrogénatóm ionizációs potenciálja. THOMSON csősugár kísérleteiből 11 voltra következtet.

Felvehet-e a hidrogénatóm egy további elektront? A fenti neutrális atom adatait a_0 , ω_0 illetve W_0 -val jelölve, az követ-

kezik, hogy az ilyen még egy negatív elektront felvett H atom sugara

$$a = 1.33 a_0 = 0.73 \cdot 10^{-8} \text{ cm}; \omega = 0.563 w_0; W = 13 \cdot W_0.$$

$W > W_0$ lehetséges kombináció és így bizonyos körülmények között (ionizáció) a hidrogénatom felvehet egy negatív töltést, kettőt azonban nem, mivel ekkor $W = 0.54 W < W_0$, a mely eset nem állhat be. Az egy pozitív töltéssel ellátott hidrogénatom H^+ viszont nem más, mint egy hidrogénatom, mely elvesztette volt az elektronját. Ebből két igen fontos tény következik: az egyik az, hogy nem létezhetik hidrogénion, melynek két pozitív töltése van, mivel ez azt jelentené, hogy a hidrogénatom két elektront vesztett el; tényleg a csősugarak mindég csak H^+ ionokat mutatnak, míg minden egyéb elem több mint egy töltéssel is jelentkezik bizonyos körülmények között: a másik igen fontos és már e közlemény elején említett következtetés az, hogy H^+ dimenziója nem atómdimenzió, de csak atómmagnak a dimenziója, mely olyan nagyságrendű, mint az elektron, így érthető, hogy a H^+ -ok áthatolhatnak vékony alumíniumlemezekben épen úgy, mint a He^{++} -ok, melyek mint a következőkben látni fogjuk, ugyancsak elektron kiterjedésűek (10^{-12} cm). Érdekes, hogy a hidrogénatom sugarait sikerül kiszámítani három olyan állandóból, mint a PLANCK-féle « h », az elektron töltése « e » és tömege « m ».

10. A héliumatom.

A diszperziós elmélet, valamint az α és β részek abszorpciója arra enged következtetni, hogy a héliumatómban két negatív elektron kering. Ebben az esetben kell, hogy a színképvonalak azon része, melyet akkor kapunk, ha a

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{\left(\frac{\tau_2}{1}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2} \right)$$

képletben τ helyébe egész számokat helyezzünk a hélium színképe legyen. Érdekes, hogy ez a szinkép, melyet így kapunk,

már régóta ismeretes, de *hidrogénszínkép*; PICKERING tapasztalta először a Puppis csillag vizsgálatánál és később FAULER laboratóriumában állította elő olyképen, hogy a hidrogénhez héliumot kevert. Ha BOHR elmélete helyes, úgy ez a PICKERING-FAULER színkép nem a hidrogénnek, hanem a héliumnak a színképe. EVANS-nak tényleg sikerült ezen színképet teljesen tiszta héliummal, mely a BALMER hidrogénszínképnek nyomát se mutatta, a fenti színképet előállítani, a mi FAULER-t is annak az elismerésére készítette, hogy a fenti színkép a héliumé. Ez pedig további igen fontos bizonyítéka annak, hogy a héliumatomban két elektron kering.

Ugyanazon körfelületen kering-e a két elektron? Tekintsük előbb azon esetet, midőn a héliummag körül csak egy elektron kering, vagyis vegyük először a pozitív töltésű héliumiont. Világos, hogy e rendszerben

$$a = \frac{1}{2} a_0, \quad \omega = 4\omega_0, \quad W = 4W_0,$$

hol a_0 , ω_0 és W_0 a hidrogénatóm sugara, elektronjainak keringési száma, illetve képződési energiája, mivel e rendszer csak annyiban fog különbözni a neutrális hidrogénatómtól, hogy itt az elektront egy kéttöltésű központ fogja vonzani. Ez a He^+ rendszer egy második elektronra, mely a He^+ átmérőjéhez képest nagy távolságban van, megközelítőleg úgy fog hatni, mint egy pozitív töltésű atómmag és ezen elektron megközelítőleg úgy fog mozogni, mint a H atóm elektronja. Viszont alig képzelhető el egy stabilis konfiguráció, melyben két egyenlő szögmomentumú elektron különböző pályákon mozog; fel kell tehát tételeznünk, hogy a héliumatom mindkét elektronja ugyanazon gyűrűben mozog.

Ekkor azonban

$$a = 0.571 a_0, \quad \omega = 3.06 W_0, \quad W = 6.13 W_0.$$

mivel

$$W[2(1)] - W[2(1)] = 2.13 W_0.$$

Ebből az következik, hogy mindkét elektron erősebben van lekötve a héliumatomban, mint a hidrogénatóm elektronja,

hogy a hélium kémiai affinitása kisebb lesz, mint a hidrogéné. Az ionizációs potenciálok értékeül $2 \cdot 13 \cdot \frac{W_0}{e} = 27$ voltot nyerrünk, kísérletileg 20·5 voltban állapították meg: viszont

$$u = 2 \cdot 13 \cdot \frac{W_0}{h} = 6 \cdot 6 \cdot 10^{15} \cdot \frac{1}{\text{sec}},$$

míg a fény diszperziójának a mérése $5,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{sec}}$ -ot szolgáltat, a héliumatóm elektronja rezgési számaul az ultra ibolya részben.

11. A litiumatóm.

A fentihez hasonló gondolatmenet azon eredményre vezet, hogy a litiumatóm három elektronja közül kettő egy felületen, a harmadik egy másik, az atómközponttól távolabb fekvő felületen mozog, hogy

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \cdot 362 \ a_0 & \omega_1 &= 7 \cdot 65 \ \omega_0 & W &= 16 \cdot 02 \ W_0 \\ a_2 &= 1 \cdot 182 \ a_0 & \omega_2 &= 0 \cdot 716 \ \omega_0 \end{aligned}$$

a két belső elektron tehát igen erősen le van kötve, míg a harmadikat könnyen veszíti el, ez a harmadik a litiumatóm egyérték elektronja, melynek elvesztése után lesz a litiumatómból Li^+ .

12. A beriliumatóm.

A beriliumatóm négy elektronja közül kettő egy a_1 sugarú kör kerületén, a másik kettő a_2 sugarú kör kerületén fog mozogni, hol

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \cdot 262 \ a_0 & \omega_1 &= 14 \cdot 46 \ \omega_0 & W &= 33 \cdot 61 \ W_0 \\ a_2 &= 0 \cdot 683 \ a_0 & \omega_2 &= 2 \cdot 21 \ \omega_0 \end{aligned}$$

hol a_0 mint mindig a hidrogénatóm sugarát jelenti.

A két külső elektron tehát kevésbé erősen van lekötve, mint a héliumatóm két elektronja, a mi a belső két elektron jelenlétének a következménye.

13. Számos elektront tartalmazó atómok.

Az atóm elektrónjainak számát a diszperzióelmélet, valamint az illető atómokon át haladó α és β részek sebességváltozásának mérése szolgáltatja számos esetben; RUTHERFORD elméletéből, illetve GEIGER kísérleteiből szintén lehet erre a számra következtetni, mely nem más, mint megközelítőleg az illető atóm súlyát jellemző számnak a fele. Még ennél is egyszerűbb van der BROEK törvénye szerint határozni ezt meg, t. i. hogy minden elem atómjában annyi elektron van, mint a hányadik helyet foglal el az illető elem a periodusos rendszerben.

Nem okoz tehát nehézséget annak a meghatározása, hogy hány elektron kering az illető atómban; bizonyos nehézségekbe ütközik ezzel szemben annak a meghatározása, hogy miképen oszlanak meg ezen elektronok az egyes gyűrűk között: közvetett érvek segítségével azonban ezeknek a valószínű elhelyezkedése is megállapítható.

A legkülsőbb gyűrűben vannak elhelyezve azon elektronok, melyek a legkönnyebben válnak meg az atómtól, az úgynevezett vegyértékelektronok, így a litiumnak, mint már láttuk volt, valamint minden a periodusos rendszer első oszlopába eső atómnak, a legkülsőbb gyűrűjében egy elektron van; az ólomnak viszont, mely pl. a negyedik oszlopba esik, négy vegyértékelektronja van, melyekkel a szerint, a mint kettő vagy négy válik le, az ólom két- vagy négyértékű vegyületeket képez. .

Segítségre szolgál az a rendszeresség, melylyel az atómtérfogatok változik az illető elem helyzetével a periodusos rendszerben; mint ismeretes a rendszer ugyanazon sorában az atómtérfogatok majdnem azonosak, míg ha a szomszéd sorba megyünk át a változás igen lényeges, legnagyobb lévén az egy, legkisebb a négy vegyértékű elemek esetében.

Ezen gondolatmenetek, valamint a stabilitás általános feltevései, melyek szerint *ne* töltésű központ körül csak akkor foroghat *n* elektron egy gyűrűben, ha $n < 8$, hogy pl. egy 20 töltésű központ körül keringő elektronok közül legfeljebb 10 he-

lyezkedhetik el egy gyűrűben, 40 töltésű központ körül 13, 60 töltésű körül 15 stb., valószínűvé teszik, hogy a könnyű atomokban a következőképen oszlanak meg az elektronok:

1. (1)	9. (4, 4, 1)	17. (8, 4, 4, 1)
2. (2)	10. (8, 2)	18. (8, 8, 2)
3. (2, 1)	11. (8, 2, 1)	19. (8, 8, 2, 1)
4. (2, 2)	12. (8, 2, 3)	20. (8, 8, 22)
5. (2, 3)	13. (8, 2, 4)	21. (8, 8, 2, 3)
6. (2, 4)	14. (8, 2, 4)	22. (8, 8, 2, 4)
7. (4, 3)	15. (8, 4, 3)	23. (8, 8, 4, 3)
8. (4, 2, 2)	16. (8, 4, 2, 2)	24. (8, 8, 4, 2, 2).

A fenti táblázat nem nélkülözi ugyan a hipotetikus elemet mégis valószínűleg nagyjában helyes, a mint azt az a közeli, összefüggés mutatja, a mely a periodusos rendszer és az atom átalakulása között fennáll.

A periodusos rendszer, több mint egy empirikusan felállított rendszer, mint egyike azon nagyszámú rendszereknek, melyekbe az elemeket beosztani lehet. MENDELEJEFF rendszere kifejezése annak az alapvető ténynek, hogy az elemek atómjai aránylag egyszerűen vannak felépítve, hogy minden elemnek annyadik hely jut a periodusos rendszerben, a hány töltést hordoz atómjának központja, illetve a hány negatív elektron kering az illető atómban, hogy az egyes merőleges sorok száma ($H = 1$ stb.) azt jelzi, hány elektron van az atom legkülsőbb gyűrűjében stb. A radioaktivitás jelensége enged először bepillantást ebbe az immár nem empirikus rendszerbe. Radioaktív átalakulást kétfélét ismerünk, olyat, melynél az atómközponttól egy elektron fut ki és olyat, midőn az két elektront vesz fel. 35 radioaktív átalakulást ismerünk és mindenkor kivétel nélkül az előbb említett első esetben az átalakuló elemből olyan lesz, mely egy helylyel tolódik el a periodusos rendszerben egy, a másik esetben két helylyel az ellenkező irányban.¹

¹ Az utóbbi esztendőök radioaktív kutatásainak (RUTHEFORD, Radioactive Substances and their radiation, Cambridge 1913) köszönhetjük annak a

Ezen megismerés képezi kiindulási pontját a következő fejezetnek, melynek tárgya:

14. Összefüggés az atómon kívül és belül történő folyamatok között.

Mi történik egy atómmal, ha a felületi rétege lead vagy elvesz egy elektront? Ha az ólomatóm felülete pl. lead egy negatív elektront, úgy pozitív egy töltésű ólomionná lesz, ha elvesz egyet, úgy negatív töltésű ólomionná. Világos, hogy ennek az ionnak más tulajdonságai lesznek, mint az atómnak, pl. más dimenziója is, a Li^+ ionról pl. láttuk, hogy a sugara csak $\frac{1}{4}$ -e lesz a litiumatóm sugarának, a H^+ -é pedig csak $\frac{1}{10000}$ része a H atóménak, viszont a Li^- sugara 1·3-szorosa a litiumatóménak és a H^- sugara 1·33-szorosa a hidrogén-atóm sugarának, de azért úgy az ólomion, mint a litiumion mutatja az ólom jellemző fő fizikai és kémiai tulajdonságait és a mi felette lényeges: mihelyest elvesztette a pozitív vagy negatív töltést, a mi aránylag könnyen megtörténik, a neutrális ólom- illetve Li -atóm lesz újból belőle. Ezzel szemben egészen különböző jelenséggel találkozunk, ha nem az atómok felületi rétegéből jönnek ki az elektronok, ha az, a mit atómmagnak nevezünk, ad le vagy vesz fel elektromos részeket. Tekintsük pl. az ólomatómot, ha ennek a *magjából* kirepül egy β rész, úgy ennek végzetes következménye lesz az

kimerítő ismeretét, hogy milyen elem átalakulása jár α és milyen β részek leadásával; a csak parányi mennyiségekben előforduló radioaktív elemek kémiai jellegét viszont két különböző módon sikerült megállapítani, az által, hogy az illető elemet már ismert elemek vegyületeivel összekeverték és azt vizsgálták, hogy melyik elemtől elválaszthatatlan az illető radioelem, a Ra D pl. elválaszthatatlan az ólomtól, a Ra E a bismuttol stb. FLECK J., Chem. Soc. 103, 394, 1052 (1913). RUSSEL, Chem. News. 107, 49, (1913) = FAJANS, Phys. 14, 131, (1913). SODDY, Chem. News. 107, 97 (1913) a másik módszer az illető elem diffúzió sebességének meghatározásában áll, mely közvetlenül szolgáltatja az illető elem vegyértékét. HEVESY, Phys. L. 14, 49, 1202 (1913).

óloमतómra nézve, az óloमतóm meg fog szűnni óloमतóm lenni és bizmutatómmá lesz; meg kell jegyeznünk, hogy az atómfelület a központi β rész leadása után fel fog venni egy β részt, különben az így keletkezett bizmut nem lenne atóm, hanem pozitív ion.

Ha viszont az ólom-atóm központja két pozitív töltést ad le, úgy az óloमतómból talliumatóm lesz. Az utóbbi változás az előbbtől annyiban különbözik, hogy itten az atómmag tömege lényeges változást szenved, 4-el, egy héliumatóm tömegével csökken, míg az előbbiben nem.

Az atómközpont töltésének változása gyökeresen megváltoztatja az atóm összes fizikai és kémiai tulajdonságait és ezen változás ellentétben a másik felületi változással, nem fordítható meg. Egy α rész energiája 10^{-4} erg lévén, 1 gr tallium átalakítása ólommal $3 \cdot 10^{17}$ erg-et igényelne, vagy pl. 1 millió voltnyi potenciálkülönbség tudna egy β részt az ólom központjából kiragadni, de a potenciál gradienst 10^{-8} cm-re számítva (nem mint azt többnyire tévesen tetszőlegesen [gradiensre vonatkoztatják), a mi 10^{14} volt cm^{-1} -nek felel meg, vagyis egy a tudomány jelenlegi állása mellett teljesen elérhetetlen feszültségkülönbségnek.

Tényleg radioaktív jelenségeket megfordítani, vagy csak sebességüket is befolyásolni mindeddig nem sikerült. Hogy a második fenti csoportba tartozó jelenségcsoport az, melyet «radioaktív»-nak neveznek, a mondottak után világos, valamint, hogy elvi különbség van ezen és a nem radioaktív, vagyis fizikai-kémiai jelenségcsoport között; míg az utóbbi tulajdonságain az atóm külsejének, addig az előbbi tulajdonságain az atóm belsejének a tulajdonságait értjük.

Az óloमतómból azáltal, hogy az elektron eltolódik az atómközpontból az atómfelületre, tehát a nélkül, hogy tömegváltozást szenvedne, egy a bizmutatóm fizikai és kémiai tulajdonságait mutató atóm lesz; két atómnak lehet tehát ugyanazon atómsúlya és mégis egészen eltérő tulajdonságai. Mint a tapasztalat mutatja, viszont különböző súlyú atóмок ugyanazon ké-

miai és fizikai tulajdonságokat mutathatják, így 5 ólomfajtát ismerünk, a *Ra B*-t, *Ra D*-t, *Th B*-t, *Akt B*-t és a *Ra G*-t a közösleges ólmon (*Pb*) kívül, melyeknek súlyai 214·0, 210·0, 212·4, 212, illetve 206·0 és melyek mindenben az ólomnak (207·18) a tulajdonságait mutatják, vagy pl. egy 20 és egy 22 atomsúlyú gázt, melyek mindketten a neon tulajdonságait mutatják stb. Ez azonban csak a következő megszorítással áll: a kémiai és a fizikai jelenségek közül ki kell venni az úgynevezett gravitációs jelenségeket, melyek közé pl. a diffúziót, a cenzentrifugálást soroljuk. Szigorúan véve az atom minden tulajdonsága függvénye a tömegének is, de gyakorlatilag a kémiai tulajdonságok, a spektrum, az elektromos és optikai tulajdonságok nem függenek az atom tömegétől, míg a gázok diffúziósebessége pl. fordítva arányos atom-, illetve molekulasúlyuk négyzetgyökével.

Az atomsúly tehát, ha a gravitációs tulajdonságoktól eltekintünk nem primer jellemzője az illető elemnek, ezzel szemben azt tapasztaljuk, hogy ismerünk 207, 210, 214 stb. atomsúlyú ólmot, de nem ismerünk 50, 100 vagy 150 atomsúlyút, továbbá hogy MENDELEJEFFnek az atomsúlyokat tekintve első-sorban sikerült az elemek periodusos rendszerét felállítani. Ennek a magyarázata a következő: az atom tulajdonságai első-sorban az atommag töltéseinek a számától függnnek, ez az atom primer jellemzője; az atomsúly bonyolódott, de egyelőre ismeretlen függvénye az atomtöltés számnak, de megközelítőleg kétszerese az atomtöltés számának.¹ Pl.

Elem :	Atomsúly :	Töltésszám :
<i>Ca</i>	40·1	20
<i>Sc</i>	44·1	21
<i>Ti</i>	48·1	22
<i>Va</i>	51·1	23
<i>Cr</i>	52·0	24
<i>Mn</i>	54·9	25
<i>Fe</i>	55·8	26

¹ A nehéz elemeknél e viszony a hármas szám felé konvergál.

Ha sikerül majd megállapítani, milyen függvénye az atom-súly az atómtöltések számának, úgy ez valószínűleg megoldását jelenti majd egy másik nagyfotosságú problémának, annak, hogy miért radioaktívek egyes elemek és miért nem mások, vagy helyesebben miért alakul át a *Ra C* már 10^{-8} sec alatt felerészben, a rádium 2000 esztendő, az urán 10^7 év és az ólom, higany stb. annál még sokkal hosszabb idő alatt, mert kétséget nem szenved — a periodusos rendszer bizonyítja a legfényesebben — hogy minden atom idővel átalakul, de míg egyesek átalakulása a szemünk előtt folyik le, másokra csak közvetve következtethetünk.

A különböző ólmok pl. stabilitás tekintetében a következőképen csoportosulnak:

Ólomfaj	Átalakulása felének az ideje	Atómsúlya
<i>Ra B</i>	27 p.	214·0
<i>Akt B</i>	36 p.	?
<i>Th B</i>	10·6 óra	212·4
<i>Ra D</i>	16·5 év	210·0
<i>Ra G</i>	?	206·0
<i>Pb</i>	?	207·18

A legkevésbé stabilis tehát a *Ra B* és a legstabilisabb az, a mit közönségesen ólomnak nevezünk. Az összes ólomatom-fajok központi töltésszáma ugyanaz és valószínűleg 90; az ólom RÖNTGEN szinképeének a meghatározásától várható e szám pontos ismerete.

Visszapillantás.

A jelenségek egész sorozata arra a következtetésre készítet, hogy az atom egy központi, térfogatához képest elenyésző térfogatú magból áll, valamint attól aránylag távol, gyűrűkben keringő elektronokból. Az atómmag tartalmazza az atom anyagi részét, mely főleg héliumból és hidrogénből áll. Az atómmag

ugyanannyi pozitív töltést hordoz, mint a hány negatív elektron kering az atom felületi rétegeiben.

Az atommag töltéseinek a száma megközelítőleg fele az illető atom súlyát jellemző számnak. Ha ismerjük az utóbbit, mely egyúttal az atomban keringő elektronoknak is a száma és azt, hogy az utóbbiak hány gyűrűben helyezkednek el, úgy ki tudjuk számítani az illető atom lineáris dimenzióját, színeképét, kémiai affinitását stb. Ezen számítás azonban még egy nagyfontosságú hipotézist feltételez, azt, hogy az atomban keringő elektronok szögmomentuma nem tetszőleges, de mindég egész számú többszöröse egy adott számnak $\frac{h}{2\pi}$ -nek, hol h a PLANK-féle állandó. E hipotézis tehát megadja egyúttal h fizikai értelmezését is.

Az atomban keringő elektronok külső erők hatása alatt állandó helyzetükből kimozdulhatnak, e kimozdulás azonban nem történik a klasszikus elektrodinamika törvényeinek megfelelőleg, de mint a quantum-elmélet követeli, ugrásszerűen; az elektrongyűrűknek tehát számos ilyen «lehetséges» helyzetük van és miközben egy ilyen helyzetet egy másikkal, stabilisabbal felcserélnek, akkor jön létre az, a mit mi spektrálvonalnak nevezünk.

Ez gyönyörű szép és mélyreható magyarázata a színekép létrejöttének, mely nemcsak szép, de termékeny is. BOHRnak, kinek e képet köszönjük, sikerült e képből kiindulva kimutatni, hogy az eddig téves hidrogénszíneképnek tekintett PICKERING-FAULER-színekép, tényleg a héliumnak a színeképe.

Az atomok kétféle változást szenvedhetnek, fizikai-kémiai változást, mely az atom felületi rétegeiben történhetik és reversibilis, vagy belső, radioaktív változást, mely az atommagban történik és irreversibilis.

Az atommag töltéseinek a száma szabja meg az atom összes fizikai és kémiai tulajdonságait, kivéve azokat, melyeket gravitációs tulajdonságoknak neveztünk, melyek a tömegnek a közvetlen függvényei, mint pl. a gázok diffundáló képessége.

Minden változás, melyet az atómmag töltésszáma szenved, végzetes eredménnyel jár az atómra, ha egy pozitív töltést veszít, úgy egy helylyel balra, ha kettőt, úgy két helylyel jobbra tolódik el a periodusos rendszerben.

Annak a bizonyítását, hogy a β részek, melyeket az úgynevezett β átalakulások közben adnak le az atómmagból jönnek, későbbre halasztottuk, közvetlen érv híján. Ez a mondottak után azonban nem lehet másképen, mert mint láttuk volt az α részek az atómmagból jönnek ki és a β rész elvesztése mindenben egyensúlyozza a pozitív töltés elvesztését. Tekintsük pl. az atóm legegyszerűbb tulajdonságát, a térfogatát, illetve sugarát, úgy a következőt látjuk: az uránatóm sugarát a 10-es relativ szám jellemzi, melyet atómsúlyának és sűrűségének a viszonya képezi megközelítőleg, mivel csak magas atómsúlyú elemeket, fémeket hasonlítottunk össze. Ha az UI atóm lead egy α részt, két pozitív töltést, úgy Ux_1 lesz belőle, mely kémiaiilag azonos a tóriummal és melynek sugarát a 16.7 szám jellemzi, az Ux_1 magja kettővel kevesebb töltést tartalmaz, mint az UI , így az elektronok a stabilis helyzetben jobban eltávolodhatnak a központtól és az Ux_1 térfogata nagyobb lesz az UI térfogatánál. Az Ux_1 átalakulása közben β részt ad le, az atómmag töltéseinek a száma, ha a β rész is a magból jön ki, itten egygyel megnagyobbodik és ennek következményeképen az atóm összehúzódik. Tényleg az új atóm, az Ux_2 sugara¹ kisebb az Ux_1 sugaránál. Ha az Ux_2 egy további β részt ad le, úgy az így keletkezett atóm töltésszámának egyenlőnek kell lennie az $UIII$ atóm töltésszámával és így az $UIII$ atómnak — a «gravitációs» tulajdonságoktól eltekintve, mindenben azonosnak kell lennie az U_1 atómmal, az UI atóm sugarának egyenlőnek az $UIII$ atóm sugarával. A kísérlet tényleg igazolja ezen következtetést. Uránsók oldatában diffúzió segítségével nem lehet az U_1 -t az U_2 -től elválasztani; a miből

¹ Az Ux_2 a tantál homologusa, sűrűsége kiszámítható a tantál, vanádium, niób stb. ismert sűrűségéből az atómtérfogat görbéinek segítségével.

za következik, hogy mindkét atom sugara ugyanaz és hogy a β rész ugyanonnét jön ki, mint az α rész.

Ismereteink az elemek természete és genezise felől érdekes és teljesen új világításba kerülnek, a periodusos rendszer megszűnik az elemek empirikus osztályozása lenni.

Az atomszerkezet tanának még nagy problémái várnak megoldásra, a mit tőle elvárunk az az, hogy az atomok belső szerkezetéből kiszámíthatók legyenek az atomok és a belőlük felépített molekulák összes tulajdonságai.

A molekulák szerkezetének ily kiszámítását néhány egyszerűbb esetben már megkísérelte BOHR.

Tekintsük azon egyszerű esetet, midőn a molekula két atommagból és a megfelelő számú elektronból áll, melyek az atommagokat összekötő tengely körül egy gyűrűben keringenek, ha « a » a gyűrű sugara és « b » az elektronok és az egyik mag közötti távolság, úgy egyensúly esetében az atommagok egyenlő távolságra lesznek a gyűrű síkjától és

$$b = a \left[\left(\frac{4n}{N} \right)^{2/3} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

hol az n az elektronok és N az egyes atommagok töltésszáma az $n = 2 \cdot N = 1$ képviseli a mondottak után a H_2 molekulát.

Ekkor $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$ vagyis a hidrogénmolekula sugara $\sqrt{3}$ -szorosa az egyik molekula-mag távolságának a molekula felületétől.

Az energia értékéül, mely a molekula képződésénél — a magokból és elektronokból — felszabadul és mely egyenlő az összes elektronok kinetikai energiájával és melyet W -vel jelzünk, a számítás azt szolgáltatja, hogy $W = 2.20 W_0$, hol W_0 a hidrogénatom képződésénél felszabaduló energia. A hidrogénmolekula képződése az atomokból energiafelszabadulásával jár. W_0 (lásd 2. oldal) $= 2.0 \cdot 10^{-11}$ erg. és $N = 6.2 \cdot 10^{23}$ -ból azt kapjuk, hogy egy hidrogéngrammmolekula képződésével két gramm-atom hidrogénből $(W - 2W_0) N = 2.5 \cdot 10^{12}$ erg. $= 6.10^4$ cal. sza-

badul fel. LANGMUIR¹ meghatározta a hővezetés állandóját izzó drótét környékező, tehát részben atómjaira disszocziált hidrogénben és ebből a fenti hőmennyiség értékéül $13,10^3$ cal-t számított ki, tehát kétszer annyit, mint a mi BOHR számításából következik. Legújabban LANGMUIR megismertette igen subtilis méréseit és a hidrogénmolekula képződési hőjének értékéül $8,10^4$ cal. kapott, a mi további igen szép eredménye BOHR elméletének.

Hevesy György.

¹ J. Amer. Chem. Soc. 34,860 (1912).

A PÖRGETTYŰ ÉS MÁGNESES TÉR BEFOLYÁSOLTA FÉNY.

A pörgettyű oly homogen tömegeloszlású forgási test, mely állandó szögsebességgel pörög forgási tengelye, tehát szabad tengely körül. Forduljon el a pörgettyű egy a tömegközéppontján áthaladó és a forgási tengelyre merőleges tengely körül, de e közben a pörgés tengelye és a szögsebesség maradjon állandó. Legyen a pörgés szögsebessége ω_1 az elfordulás, vagyis a præcessio szögsebessége ω_2 , úgy hogy

$$\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\beta}{dt}.$$

A forgási tengelytől r távolságban levő pont lineáris sebessége

$$r\omega_1.$$

Ha φ_i az a szög, melyet az elfordulás tengelye és az r egymással képeznek, akkor az $r\omega_1$ sebességnek az elfordulás tengelyével párhuzamos összetevője

$$r\omega_1 \sin \varphi_i$$

az elfordulás tengelyére merőleges összetevője

$$r\omega_1 \cos \varphi_i.$$

Az elfordulás következtében csupán az utóbbi összetevő változik meg, ez is csak irányra nézve, úgy hogy a dt idő alatt hozzájáruló sebességváltozás

$$r\omega_1 \cos \varphi_i \cdot d\beta$$

tehát az időegység alatt hozzájáruló sebességváltozás, vagyis a gyorsulás

$$r\omega_1 \cos \varphi_i \cdot \frac{d\beta}{dt} = r_1\omega_1\omega_2 \cos \varphi_i.$$

Ha m a forgási tengelytől r távolságban levő pont tömege, akkor a sebességváltozást létrehozó erő

$$mr\omega_1 \cos \varphi_i \cdot \omega_2.$$

Legyen a pörgési tengely Ξ , az elfordulás tengelye H , a Ξ és H irányokra merőleges és a tömegközépponton keresztül haladó harmadik irány Z . A Ξ tengely pozitív iránya legyen az az oldal, melyből az ω_1 iránya az óramutató járásával egyezőnek látszik. Szintúgy az H tengely pozitív iránya legyen az az oldal, melyből az ω_2 iránya az óramutató járásával egyezőnek látszik. Végül a Z tengely pozitív iránya legyen az az oldal, melyből az H tengely pozitív oldala felé eső pont említett sebességváltozását létrehozó erő a Z tengely körül az óramutató járásával egyező forgást hozza létre. A Ξ, H, Z tengelyrendszer a pörgettyű elfordulásával együtt fordul el, ellenben pörgés közben nem változik.

Valamennyi pontra ható erő a Z tengely körül a Z pozitív oldaláról nézve, az óramutató járásával egyező forgást igyekszik létrehozni, úgy hogy a ΞZ siktól az H pozitív oldala felé eső pontokban az erők iránya a Ξ tengely pozitív irányával, az H negatív oldala felé eső pontokban az erők iránya Ξ tengely negatív irányával egyezik meg. Tekintve, hogy

$$r \cos \varphi_i = \eta_i$$

tehát a Ξ tengely irányába eső erő

$$\Xi_i = m\eta_i\omega_1\omega_2,$$

a mely pozitív vagy negatív a szerint, a mint η pozitív vagy negatív.

Ha ezen erőket az egész pörgettyűre nézve összegezni akarjuk, akkor külön kell a pozitív és külön a negatív Ξ_i -ket

összegezni, vagyis a pörgettyűt a EZ sikkal két szimmetrikus részre osztani. Az összegezés tehát egyik esetben csupán pozitív, a másik esetben csupán negatív η -kra nézve végzendő, mindkét fajta erők eredőjének nagyságát a

$$\Xi = \sum m \eta_i \omega_i \frac{d\beta}{dt}$$

adja meg.

Vegyük a pozitív irányú erők eredőjét. Az összegezés csak a pörgettyűnek a EZ siktól a pozitív H felé erő részére terjesztendő ki. Az eredő erő nagysága

$$\sum m \eta_i \omega_1 \omega_2 = \omega_1 \omega_2 \sum m \eta_i.$$

Az erő támadási pontjának koordinátái

$$\eta_0 = \frac{\sum \Xi_i \eta_i}{\sum \Xi_i}, \quad \zeta_0 = \frac{\sum \Xi_i \zeta_i}{\sum \Xi_i}.$$

Tekintve, hogy a ΞH sík is szimmetriás sík, tehát

$$\sum \Xi_i \zeta_i = 0$$

és így

$$\zeta_0 = 0.$$

η_0 -ra nézve áll

$$\eta_0 = \frac{\sum \Xi_i \eta_i}{\sum \Xi_i} = \frac{\omega_1 \omega_2 \sum m \eta_i^2}{\omega_1 \omega_2 \sum m \eta_i} = \frac{\sum m \eta_i^2}{\sum m \eta_i}.$$

Az η_0 független úgy a pörgés, mint az elfordulás szögsebességétől. Az η_0 a fél pörgettyű tömegközéppontjának koordinátájával η_1 -el is kifejezhető. (Az i index elhagyva.)

$$\eta_0 = \frac{\sum m \eta^2}{\sum m \eta} = \frac{\sum m \eta^2}{\eta_1 \sum m} = \frac{\sum m \eta^2}{\eta_1 \frac{1}{2} M},$$

a hol M most már az egész pörgettyű tömegét jelenti.

A két egyenlő nagyságú, de ellenkező irányú erő erőpárt alkot, melynek forgató nyomatéka

$$\begin{aligned} F &= 2\eta_0 \omega_1 \omega_2 \sum m \eta \\ &= \omega_1 \omega_2 \cdot 2 \sum m \eta^2, \end{aligned}$$

a hol az összegezés mindig csak a fél pörgettyűre vonatkozik. Ha a 2-öt, mint szorzót elhagyjuk, akkor az összegezés már az egész pörgettyűre terjesztendő ki. Tehát

$$F = \omega_1 \omega_2 \Sigma m \eta^2.$$

A pörgettyűnek a pörgési tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka

$$K = \Sigma m \eta^2 = \Sigma m \eta^2 + \Sigma m \zeta^2.$$

Azonban

$$\Sigma m \eta^2 = \Sigma m \zeta^2,$$

tehát

$$K = 2 \Sigma m \eta^2,$$

úgy hogy a forgató nyomaték

$$F = \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2 K.$$

Ha tehát az ω_1 szögsebességgel pörgő pörgettyű forgási tengelyét valamely F nagyságú forgató nyomaték egy a forgási tengelyre merőleges tengely körül elforgatni igyekszik, akkor a pörgettyű ezen két irányra merőleges harmadik irány körül igyekszik elfordulni ω_2 szögsebességgel.

Ha a pörgettyű egy s hosszúságú ingának a lencsáját képezi, akkor az inga lengése következtében a pörgettyű elfordul, úgy hogy a nehézségi erő forgató nyomatékán kívül egy másik forgató nyomaték lép fel. Az inga tehát másképen végzi mozgását, a mikor a pörgettyű pörög, mint mikor nem pörög. Legyen az inga hossza a forgásponttól a pörgettyű tömegközéppontjáig s és legyen az s iránya egyszersmind a pörgési tengely iránya. Közelítő eredmények elnyerése végett, tárgyaljuk ennek az ingának a mozgását úgy, mint egy matematikai inga mozgását. A kilengés szöge ne legyen nagy, úgy hogy a szög abszolút mértékszámát vehessük a szög sinusa helyett. Ha a nyugalomban levő inga lencséjének, tehát a pörgettyűnek tömegközéppontján át egy az inga hosszirányára merőleges XY koordináta rendszert fektetünk, akkor a tömegközép-

pont mozgására nézve, ha m az inga tömege, állanak a következő egyenletek:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{g}{s} x,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m \frac{g}{s} y.$$

A mikor a pörgettyű ω szögsebességgel pörög és tömegközéppontja

$$\frac{1}{s} \frac{dx}{dt} \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{s} \frac{dy}{dt}$$

szögsebességekkel elmozdul, akkor az elfordulás következtében forgató nyomaték lép fel, melynek nagysága, mivel az elfordulás és a forgató nyomaték iránya egymásra merőleges:

$$F_x = \mp \frac{1}{2} \omega K \frac{1}{s} \frac{dy}{dt}, \quad F_y = \mp \omega K \frac{1}{s} \frac{dx}{dt},$$

a mi a forgási ponttól s távolságban levő tömegközéppontban működő

$$X = \pm \frac{1}{s^2} \omega K \frac{1}{s} \frac{dy}{dt}, \quad Y = \mp \frac{1}{2} \omega K \frac{1}{s^2} \frac{dx}{dt}$$

erőkkel æquivalens forgató hatású. A kettős előjel közül mindkét helyen a felsőt véve, az ilyen inga tömegközéppontjának mozgását megközelítőleg tehát a következő differenciálegyenlet-rendszer fejezi ki

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{g}{s} x + \frac{1}{2} \omega K \frac{1}{s^2} \frac{dy}{dt},$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m \frac{g}{s} y - \frac{1}{2} \omega K \frac{1}{s^2} \frac{dx}{dt},$$

a mely írható

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -ax + b \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -ax - b \frac{dx}{dt}$$

alakban, a hol

$$a = \frac{g}{s}, \quad b = \frac{1}{2s^2} \frac{K}{m} \omega.$$

A differenciálegyenletrendszert nyilván kielégíti az

$$x = r_0 \cos(at)$$

$$y = r_0 \sin(at)$$

megoldás.

Képezve a differenciálhányadosokat

$$\frac{dx}{dt} = -ar_0 \sin(at), \quad \frac{dy}{dt} = ar_0 \cos(at),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2r_0 \cos(at), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a^2r_0 \sin(at);$$

ezeket az adott differenciálegyenletrendszerbe helyettesítve:

$$-a^2r_0 \cos(at) = -ar_0 \cos(at) + bar_0 \cos(at)$$

és

$$-a^2r_0 \sin(at) = -ar_0 \sin(at) + bar_0 \sin(at)$$

egyszerűsítve

$$-a^2 = -a + ba,$$

és

$$-a^2 = -a + ba.$$

Ezek az a -ra nézve ugyanazt az egy egyenletet adják.

$$a^2 + ba - a = 0,$$

a honnan

$$2a = -b \pm \sqrt{b^2 + 4a},$$

tehát

$$2a_1 = -b + \sqrt{b^2 + 4a} = 2\gamma_1$$

$$2a_2 = -b - \sqrt{b^2 + 4a} = -2\gamma_2.$$

Az első megoldást γ_1 -et véve a mozgás egyszerű körmozgás, melynek periodusa

$$2\pi : \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 4a} - b),$$

a másodpercenkénti keringések száma

$$n_1 = \frac{1}{4\pi}(\sqrt{b^2 + 4a} - b).$$

Ha a pörgettyű nem pörög, akkor $b = 0$, tehát a másodpercenkénti keringések száma

$$n_0 = \frac{1}{4\pi} \sqrt{4a} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{a}.$$

A két keringési szám között a következő összefüggés áll fenn.

$$n_1 = \frac{1}{4\pi} (\sqrt{b^2 + 16\pi^2 n_0^2} - b)$$

$$= \sqrt{n_0^2 + \left(\frac{b}{4\pi}\right)^2} - b,$$

tehát

$$n_1 < n_0.$$

Ebben az esetben $t = 0$ -ra nézve

$$x = r_0, \quad y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma_1 r_0 = 2\pi n_1 r_0.$$

A második megoldást véve x és y írhatók:

$$x = r_0 \cos(-\gamma_2 z) = r_0 \cos(\gamma_2 z),$$

$$y = r_0 \sin(-\gamma_2 z) = -r_0 \sin(\gamma_2 z).$$

Ebben az esetben $z = 0$ -ra nézve

$$x = r_0, \quad y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -\gamma_2 r_0,$$

a keringési szám pedig

$$n_2 = \sqrt{n_0^2 + \left(\frac{b}{4\pi}\right)^2} + \frac{b}{4\pi},$$

tehát

$$n_2 > n_0.$$

A két megoldásnak megfelelő mozgásnál, tekintve hogy az elsőnél x és y előjele pozitív, a másodiknál ellenben az x

pozitív és az y negatív, a keringések ellenkező irányban mennek végbe. A két mozgás úgy jön létre, ha az ingát, mint kör-ingát indítjuk meg a kimozdítás irányára merőleges

$$\frac{dy}{dt} = ar_0$$

kezdő sebességgel. Adott pörgési sebesség mellett a két ellentett irányú kezdeti sebesség szerint egymástól különböző keringési számokat kapunk, melyek viszont a pörgés nélküli keringési számtól is különböznek. γ_1 esetében $\gamma_1\pi$ a b -vel, tehát az ω -val egyező, γ_2 esetében $\gamma_2\pi$ a b -vel, tehát az ω -val ellentett előjelű. A három keringési számra nézve az előbbiek szerint fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$n_1 < n_0 < n_2.$$

Az egyenletrendszer általános megoldása

$$x = C_1 \cos(\gamma_1 z) + C_2 \cos(\gamma_2 z),$$

$$y = C_1 \sin(\gamma_1 z) - C_2 \sin(\gamma_2 z).$$

Az ingát az x tengely mentén r_0 távolságra kimozdítjuk és akkor egyszerűen elengedjük. Ebben az esetben $t = 0$ -ra nézve

$$x = r_0, \quad y = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Képezve a differenciálhányadosokat

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma_1 C_1 \sin(\gamma_1 z) - \gamma_2 C_2 \sin(\gamma_2 z),$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_1 C_1 \sin(\gamma_1 z) - \gamma_2 C_2 \sin(\gamma_2 z);$$

a kezdeti feltételek szerint

$$r_0 = C_1 + C_2$$

$$0 = \gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2$$

innen

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} r_0, & C_2 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} r_0 \\
 &= \frac{\sqrt{b^2 + 4a + b}}{2\sqrt{b^2 + 4a}} r_0 & &= \frac{\sqrt{b^2 + 4a - b}}{2\sqrt{b^2 + 4a}} \\
 &= \frac{A + b}{2A} r_0 & &= \frac{A - b}{2A} r_0
 \end{aligned}$$

ahol

$$A = \sqrt{b^2 + 4a}.$$

Úgy hogy az általános megoldás

$$\begin{aligned}
 x &= r_0 \frac{A + b}{2A} \cos\left(\frac{A - b}{2} z\right) + r_0 \frac{A - b}{2A} \cos\left(\frac{A + b}{2} z\right), \\
 y &= r_0 \frac{A + b}{2A} \sin\left(\frac{A - b}{2} z\right) - r_0 \frac{A - b}{2A} \sin\left(\frac{A - b}{2} z\right).
 \end{aligned}$$

Ezen egyenleteknek megfelelő mozgás két különböző sugarú körpályán való mozgás összetétele, melyeknél a két haladási irány ellenkező, a keringési szám is különböző. Az egyik körpálya sugara

$$r_0 \frac{A + b}{2A},$$

a másiké

$$r_0 \frac{A - b}{2A}.$$

Ezen általános megoldás meghatározta pálya alakja és tulajdonságai sokkal jobban kitűnnek, ha a görbét polárkoordinátákban állítjuk elő.

A mozgás differenciálegyenletei voltak

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -ax + b \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -ax - b \frac{dx}{dt}$$

vagy

$$x'' = -ax + by' \quad (1)$$

$$y'' = -ay + bx' \quad (2)$$

Az (1)-et x' -vel, a (2)-öt y' -vel szorozva és összeadva

$$x'x'' + y'y'' = -a(xx' + yy'),$$

integrálva

$$x'^2 + y'^2 = -a(x^2 + y^2) + k, \dots$$

$t = 0$ esetében

$$x = r_0 \quad x' = 0$$

$$y = 0 \quad y' = 0,$$

úgy hogy a k_1 állandóra nézve

$$0 = -ar_0^2 + k,$$

innen

$$k_1 = ar_0^2.$$

Az integrálás eredménye

$$x'^2 + y'^2 = -a(x^2 + y^2 - r_0^2). \quad (3)$$

Az (1)-et y -nal, a (2)-öt x -el szorozva és kivonva

$$yx'' - xy'' = b(y'y + x'x)$$

integrálva

$$yx' - xy' = \frac{b}{2}(x^2 + y^2) + k_2,$$

$t = 0$ -ra nézve a fenti értékeket helyettesítve

$$0 = \frac{b}{2}r_0^2 + k_2,$$

innen

$$k_2 = -\frac{b}{2}r_0^2;$$

úgy hogy az integrálás eredménye

$$yx' - xy' = \frac{b}{2}(x^2 + y^2 - r_0^2). \quad (4)$$

Áttérve a polárkoordinátákra r és ϑ -ra, a (3) és (4) írható

$$r'^2 + r^2\vartheta'^2 = -a(r^2 - r_0^2) \quad (5)$$

és

$$-r^2 \vartheta' = \frac{b}{2} (r^2 - r_0^2). \quad (6)$$

A (6)-ból

$$\vartheta' = -\frac{b}{2} \frac{r^2 - r_0^2}{r^2}$$

ezt az (5)-be helyettesítve

$$r'^2 + \frac{b}{4} \frac{(r^2 - r_0^2)^2}{r^2} = -a \frac{(r^2 - r_0^2) r^2}{r^2}$$

innen

$$\begin{aligned} r'^2 &= -\frac{b^2}{4} \frac{(r^2 - r_0^2)^2}{r^2} - a (r^2 - r_0^2) \\ &= -\frac{r_0^2 - r^2}{r^2} \left[\frac{b^2}{4} (r_0^2 - r^2) - ar^2 \right] \\ &= -\frac{r_0^2 - r^2}{r^2} \frac{b^2 + 4a}{4} \left(\frac{b^2}{b^2 + 4a} r_0^2 - r^2 \right), \end{aligned}$$

tehát

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{A}{2} \frac{1}{r} \sqrt{-(r_0^2 - r^2) \left(\frac{b^2}{A^2} r_0^2 - r^2 \right)}.$$

Mivel a sebesség valós, kell, hogy

$$-(r_0^2 - r^2) \left(\frac{b^2}{A^2} r_0^2 - r^2 \right) > 0,$$

r valós és pozitív szám lévén, kell továbbá, hogy

$$r_0 \geq r \geq \frac{b}{A} r_0$$

legyen, lévén az

$$A = \sqrt{b^2 + 4a} \text{-ban}$$

az a mindig pozitív szám.

Az r két határ közt változhat.

$$r_{\max} = r_0 \text{ és } r_{\min} = r_0 \frac{b}{A} = r_1.$$

Tehát

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A}{2} \frac{1}{r} \sqrt{-(r_0^2 - r^2)(r_1^2 - r^2)}, \quad (7)$$

úgy hogy

$$t = \int_0^r \frac{A}{2} \frac{1}{r} \sqrt{-(r_0^2 - r^2)(r_1^2 - r^2)} dr,$$

$$t = \frac{1}{A} \arccos \frac{2r^2 - r_0^2 + r_1^2}{r_0^2 - r_1^2},$$

és

$$r^2 = \frac{1}{2}(r_0^2 + r_1^2) + \frac{1}{2}(r_0^2 - r_1^2) \cos(At).$$

Az r a t -nek periodusos függvénye a periodus

$$T = \frac{2\pi}{A},$$

ennek reciprok értéke pedig

$$n = \frac{1}{2\pi} A.$$

Pörgés nélkül volna a lengések számára nézve:

$$2\pi n_0 = A_{b=0} = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a},$$

a míg pörgéssel

$$2\pi n = A = \sqrt{4a + b^2} > 2\pi n_0;$$

úgy hogy

$$n > n_0,$$

tehát

$$T < T_0.$$

A ϑ -ra nézve a (6)-ból

$$\vartheta' = -\frac{b}{2} \frac{r^2 - r_0^2}{r^2} = -\frac{b}{2} + \frac{br_0}{2},$$

úgy hogy

$$\vartheta = -\frac{b}{2} t - \frac{br_0}{2} \int_0^t \frac{dt}{r^2},$$

innen az A és r_1 tekintetbe vételével

$$\vartheta = -\frac{b}{2}t + \arctan \left[\frac{r_1}{r_0} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} At \right) \right],$$

tehát

$$\operatorname{tg} \left(\vartheta + \frac{b}{2}t \right) = \frac{r_1}{r_0} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} At \right)$$

ϑ a t -nek periodusos függvénye, úgy hogy valahányszor a t megváltozik $\frac{2\pi}{A}$ -val ugyanakkor a ϑ megváltozik

$$\pi \left(1 - \frac{b}{A} \right) \text{-val.}$$

Pörgés nélkül a lengési sík marad ugyanaz, pörgés esetében ellenben a lengés síkja egy lengés alatt

$$\frac{\beta}{2} = \frac{b}{A} \pi \text{-vel,}$$

tehát egy rezgés alatt

$$\beta = \frac{b}{A} 2\pi \text{ vel}$$

elfordul. A hol az r_1 és A értékének tekintetbe vételével

$$\beta = \frac{r_1}{r_0} 2\pi.$$

A görbe érintője és a radius vector által bezárt szög ϕ -re nézve:

$$\cotg \phi = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{r'}{\vartheta'}.$$

A (7)-ből és (6)-ból a megfelelő értékeket helyettesítve

$$\cotg \phi = \frac{A}{b} \sqrt{\frac{r_1^2 - r^2}{r_0^2 - r^2}},$$

tehát

$$\cotg \phi = \sqrt{\frac{r^2 - r_1^2}{r_0^2 - r^2}}.$$

Innen kitetszik, hogy ha $r = r_1$, akkor $\cotg \phi = 0$, tehát

$$\phi = \frac{\pi}{2},$$

és mikor $r = r_0$, akkor $\cotg \phi = \infty$, tehát

$$\phi = 0.$$

A görbére vonatkozó ezen adatokból kitűnik, hogy összes pontjai az r_0 és r_1 sugarú két koncentrikus kör képezte gyűrűben vannak. $t = 0$ -kor a pont az r_0 sugarú kör kerületén van. Ebben a pontban a görbe merőlegesen metszi az r_0 sugarú kört. $t = \frac{\pi}{A}$ -kor a pont az r_1 sugarú kör kerületén van. Ebben a pontban a görbe érinti az r_1 sugarú kört. $t = 2 \frac{\pi}{A}$ -ra ugyanaz áll, mint $t = 0$ -ra, $t = 3 \frac{\pi}{A}$ -ra ugyanaz, mint $t = 2 \frac{\pi}{A}$ -ra stb. Megjegyzendő még, hogy $t = 4 \frac{\pi}{A}$ -kor a pont az r_0 sugarú kör kerületén a kezdeti helyzethez képest $\frac{r_1}{r_0} 2\pi$ nagyságú szöggel, tehát $2r_1\pi$ hosszúságú ívdarabbal tolódott el, vagyis ugyanannyival, a mekkora az r_1 sugarú kör kerülete. Ha tehát (eltekintve most attól, hogy a számítások csak közelítőek) a két kör sugarainak viszonya

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4a}}$$

nemcsak alakra, hanem értékre nézve is irracionális, akkor a kezdeti állapot újra nem jhet létre.

★

A pörgettyűvel, mint lencsével ellátott inga mozgásához teljesen hasonló mozgást végez a fénysugarat létrehozó elektron az egyensúlyi helyzete körül akkor, a mikor mágneses térben végzi a rezgését és az erővonalak iránya merőleges az elektron rezgési síkjára. A fénysugár szerkezetére nézve ugyanis a felfogásunk az, hogy a természetes fényben az egyes elektronok minden-

féle, de periodusos mozgást végeznek a fénysugár merőleges síkban, illetve az a periodusos mozgás, melynek iránya a fénysugár irányával esik össze, a fényérzet és fényhatás nagyságához egyáltalában nem járul hozzá. Ha az elektron rezgési síkja merőleges az erővonalak irányára, akkor annak egyszerűen periodusos mozgása az (1) és (2) alatt felírt differenciálegyenletek értelmében történik, nem véve figyelembe az elektronnak mint fénysugarat létrehozó oknak tovahaladó mozgását. Ez a két egyenlet a mondott esetben mindenkor fennáll, legyen a természetes fénysugár kiválasztott elektronja akár síkban, akár pedig körben sarkított fénysugarat létrehozó elektron.

Mágneses tér nélkül az elektron mozgása minden esetben a következő differenciálegyenleteknek megfelelően megyen végbe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -ay,$$

a hol az a arányos a rezgési szám négyzetével, n_0^2 -tel.

A mágneses tér befolyása alatt a BIOT-SAVART-féle törvény

$$df = \frac{\mu i dl \sin \vartheta}{r^2} = I \cdot dl \sin \vartheta$$

értelmében új gyorsulás lép fel, melynek iránya az elektron mindenkori mozgására merőleges. I a tér intenzitása, i pedig az áram intenzitása, a hol az i a ROWLAND-féle hatás értelmében arányos az elektron mindenkori sebességével, vagyis a

$$\frac{dx}{dt} \text{ és } \frac{dy}{dt} \text{-vel.}$$

Az erő és így a gyorsulás iránya az erővonalak és az elektron mindenkori mozgásirányán átfektetett síkra merőleges, úgy hogy a mozgást meghatározó differenciálegyenletek

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax + b \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -ax - b \frac{dy}{dt},$$

a hol ezek után a arányos a rezgési szám négyzetével n_0^2 -tel, b pedig többek közt a mágneses tér intenzitásával.

A FARADAY-féle jelenségnél a polarizáló nikol áteresztette síkban sarkított fénysugár a mágneses erővonalak irányában haladva érkezik a másik nikolhoz. Polarizációs síkja azonban egy rezgés alatt előfordul

$$\beta = \frac{b}{A} 2\pi \text{ vel,}$$

a hol a b és vele együtt az A is függ azon közegtől, a melyen a fénysugár keresztül halad. Úgy hogy l hosszúsága úton első közelítésben

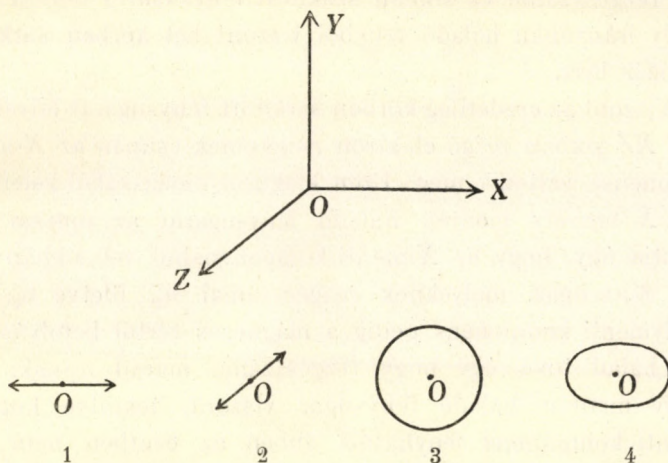
$$\frac{b}{A} \frac{l}{c} n_0 2\pi \text{ vel}$$

fordul el a polarizációs sík. Ekkora szöggel kell tehát a kezdetben sötétre állított analizátor nikolját elforgatni, hogy ismét fényminimum álljon elő.

A ZEEMAN-féle hatásnál maga a fényforrás van erős mágneses térben. A fényforrást kell tehát, mint mágneses térben mindenféle periodusos mozgást végző elektronok raját felfognunk. Homogen fényforrást használva valamennyi elektron rezgésének periodusa csak véges számú lehet. Ezen véges számú periodusok közül vegyünk egyet, mondjuk n_0 -át. A mágneses tér az elektron periodusos mozgását a BIOT-SAVART-féle törvény értelmében csak akkor nem befolyásolja, a mikor az az erővonalak irányában megyen végbe.

Legyen a fényforrás az XYZ koordináta rendszer kezdőpontjában, Z legyen az erővonalak iránya, úgy hogy a mágneses tér befolyásolása szempontjából ugyanazon következtetések érvényesek az X , mint az Y irányra.

1. Eredetileg síkban sarkított fénysugarat létrehozó és az X tengely irányában rezgő elektron rezgése megváltozik és az egyszerűen egyenesben végbemenő mozgásból két ellentett irányú különböző sugarú körpályán végbemenő, különböző rezgésszámú két mozgásra felbontható bonyolult mozgás lesz.



Ezen elektron mozgásából keletkező és az X tengely mentén haladó fénysugarat az optikai rács két fénysugárra bontja a különböző rezgésszámnak megfelelően, úgy hogy az új két periódusra n_1 és n_2 -re nézve

$$n_1 < n_0 < n_2.$$

Ugyanez áll a Z tengely irányában haladó fénysugárra nézve is, avval a különbséggel, hogy az előbbeni esetben a két fénysugár síkban, az utóbbi esetben pedig körben van sarkítva.

2. Az eredetileg a Z tengely irányában rezgő elektron mozgását a mágneses tér nem befolyásolja. Az ebből származó fénysugár a Z tengely irányában fényhatást nem hoz létre, tehát nem is fénysugár; az X tengely irányában pedig n_0 rezgésszámú síkban sarkított fénysugár jön létre.

3. Az eredetileg körben sarkított fénysugarat létrehozó és az XY síkban rezgő elektron rezgése szintén megváltozik és az

egyszerű körmozgásból újból körmozgás lesz, melynek sugara és rezgésszáma azonban más, mint az eredetié, a szerint, a mint az elektron jobbra vagy balra sarkított fénysugár elektronja. Ezen kétfajta elektron mozgásából keletkező és az X tengely mentén haladó fénysugarat az optikai rács két különböző n_1 és n_2 rezgésszámú és síkban szakitott fénysugárra bontja. A Z tengely irányában haladó fényből viszont két körben sarkított fénysugár lesz.

4. Viszont az eredetileg körben sarkított fénysugarat létrehozó és az XZ síkban rezgő elektron rezgésének csupán az X -menti komponense változik meg. Ezen elektron mozgásából keletkező és az X tengely mentén haladó fénysugarat az optikai rács felbontja úgy, hogy az X -menti komponensből két síkban sarkított fénysugár, melyeknek rezgésszámai n_1 , illetve n_2 , a Z tengelymenti komponens pedig a mágneses tértől befolyásolatlanul halad tovább, úgy hogy rezgésszáma marad n_0 -nak. A Z tengely mentén haladó fénysugár viszont, tekintve hogy a Z menti komponens fényhatást ebben az esetben nem hoz létre, az X menti komponens befolyása következtében az optikai rács hatása alatt két n_1 , illetve n_2 rezgésszámú körben sarkított fénysugárra szakad.

Erős mágneses térben gerjedt homogén fényforrás kibocsátotta fénysugár az optikai rács hatása alatt két vagy három vonalat ad, a szerint a mint a fénysugár az erővonalak irányában illetve az erővonalak irányára merőlegesen halad tovább.

Fröhlich Károly.

INDUKCZIÓS KISÉRLETEK A KÖZÉPISKOLÁBAN.¹

Az elektrotechnika bámulatos fejlődése az utóbbi évtizedek alatt a váltakozó áram jegyében folyt le. A váltakozó-áramú gépek diadalát első sorban az a körülmény tette lehetővé, hogy a kényelmes és gazdaságos energia-átvitel kérdését csakis velük sikerült véglegesen megoldani. A földkerekség nagy vízi erői ezzel egy csapásra a kultúra és az ipari fejlődés szolgálatába állottak s a bámulatos sikernek kulcsa, az igénytelen külsejű transzformátor ma már megtalálható a kisebb vidéki városok utczáin is, hol titokzatos zúgásával vonja magára a laikusok figyelmét.

A mióta pedig sikerült a váltakozó áram energiáját kiszabadítani a dróttekercesek szűk birodalmából s az elektromos szikrá-távírással ledőltek a térnek és az időnek korlátai, azóta a közérdeklődés fokozottabb mértékben fordult feléje. Az elektromos hullámok kiléptek a laboratóriumok világából, új korszakot nyitottak az emberiség művelődéstörténetében s ma már a nagy óceánok fölött nem a némaság lelke honol, hanem az elektromos hullámok szárnyain gondolatok röpködnek tova s hangosan hirdetik az emberi szellem egyik legnagyobb diadalát!

A fejlődés tehát a váltakozó áramokra terelte a közfigyelmet s emiatt a *középiskolai* oktatásban sem lehet kitérni az *alapjelenségek* demonstratív tárgyalása elől! A tanuló ifjúság érdeklődése az elektromosság tüneményei iránt különben is

¹ Bemutatva a Math. Phys. Társulat 1914. ápr. 16-iki gyűlésén.

ismeretes, hiszen akárhányszor a tanulók érdeklődése kényszeríti a tanárt valamely kérdés alaposabb tárgyalására. Az elektrosztatikai anyag alapos megrostálásával pedig mindig lehet elegendő időt nyerni az ide vonatkozó, rendkívül tanulságos kérdések megbeszélésére. A kérdésnek ez a fontossága indított arra, hogy a következőkben az indukciós jelenségek demonstrálásánál általánosan elterjedt néhány hibás eljárásra rámutassak s oly helyesen méretezett kísérleti összeállításra hívjam föl a figyelmet, mely sokoldalú használhatósága mellett éppen egyszerűségével biztosítja a demonstrációk sikerét.

I. Az indukciós tekercsek hibás méretezéséről.

A középiskolai gyakorlatban elterjedt s az indukció alapjelenségeinek kísérleti bemutatására szolgáló tekercsek a menetszám lehető növelése céljából általában *vékony* drótból készülnek. Mi azonban ki fogjuk mutatni, hogy *a menetszám ésszerűtlen növelésének és főleg a vékony drót alkalmazásának nemcsak semmi értelme sincs, hanem eleve kizárja a kísérletek sikerét.*

Az áramjelző készülékek (galvanométer, izzólámpa, hődrót stb.) adatai ugyanis mindig az *áramerősség* függvényei s így nem elégséges *egyedül* az indukált *elektromótoros* erő növelésére törekednünk, hanem meg kell vizsgálnunk, vajjon a készülék *ellenállása* nem növekszik-e rohamosan a vékony drót és a sok menet alkalmazása miatt?

Legyen adva tehát egy indukciós tekercs, melynek ellenállása r , a menetek száma n . Tegyük föl, hogy adott kísérleti berendezésnél a tekercsen átmenő mágneses erővonalak száma Φ , akkor a tekercsben indukált elektromótoros erő t időpillanatban elektromágneses C. G. S. egységekben kifejezve $= n \frac{d\Phi}{dt}$. Ha az áramjelző készülék ellenállása g , akkor az indukált áram *erőssége*

$$i = n \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{1}{r+g}. \quad (1)$$

Ez a formula azonban teljesen alkalmatlan a gyakorlati használatra, mert benne n és r mint *független változók* vannak föltüntetve, holott a valóságban mindig *adott* sablonok tekercseléséről van szó s így a tekercselés ellenállása *a menet-szám függvénye*.

Az összefüggés megállapítása céljából képzeljük *ugyanazt* a sablont *fél* akkora keresztmetszetű dróttal tekercselve, akkor a szigetelő réteg vastagságától eltekintve: a menetek száma *kétszer akkora* lesz ugyan, mint az előző esetben, de az ellenállás *négyszeresre* növekedett, mert *a)* kétszer oly hosszú a drót és *b)* fél akkora a keresztmetszet. Tehát adott tekercs sablon esetén *a tekercs ellenállása a menetszám négyzetével arányos*, vagyis

$$r = k_1 n^2 \quad (2)$$

honnan

$$n = k \sqrt{r} \quad (2a)$$

Itt k_1 és k arányossági tényezők. Helyettesítve (2a) kifejezést az (1) egyenletbe:

$$i = k \frac{d\Phi}{dt} \frac{\sqrt{r}}{r+g} \quad (3)$$

alakban állítható elő.

Minthogy adott kísérleti összeállításnál g állandó, ennél fogva a

$$\frac{\sqrt{r}}{r+g}$$

függvény akkor éri el maximális értékét, ha $r = g$ s így az elérhető legnagyobb intenzitás a következő lesz:

$$i_{\max} = I = k \frac{d\Phi}{dt} \frac{\sqrt{g}}{2g} = \frac{k\Phi'}{2\sqrt{g}}. \quad (4)$$

A menetszám növelésének tehát csak addig van értelme, míg a tekercs ellenállása egyenlővé nem lett az áramjelző készülék ellenállásával!

Ha a menetszámot oktalanul még tovább növeljük, az elérhető áramerősség *csökkenni* fog s a kísérletek sikerét önmagunk teszszük tönkre. A csökkenés nagyságát úgy ítéldhetjük meg legjobban, ha a (3) egyenletben a számlálót és nevezőt $2\sqrt{g}$ -vel szorozva bevezetjük az elérhető intenzitás (4) alatti maximális értékét:

$$i = I \frac{2\sqrt{rg}}{r+g} = I \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{g} + \frac{g}{r} + 2}}. \quad (5)$$

Az

$$a = \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{g} + \frac{g}{r} + 2}}$$

korrekciós tag itt oly praktikus tényezőnek tekinthető, melyből adott esetben a kísérleti összeállítás hasznavehetőségére vonhatunk következtetést.

Ez a kifejezés r és g -re nézve szimmetrikus és $\frac{r}{g} = k$ továbbá $\frac{r}{g} = \frac{1}{k}$ relációk mellett *azonos* értéket vesz föl. Néhány speciális esetre a köv. táblázat ad fölvilágosítást:

a	$\frac{r}{g}$	$\frac{r}{g}$
1.00	1	1
0.74	$\frac{1}{5}$	5
0.57	$\frac{1}{10}$	10
0.20	$\frac{1}{100}$	100
0.06	$\frac{1}{1000}$	1000

Tehát a legkedvezőbb $\frac{r}{g} = 1$, $a = 1$ esethez képest $\frac{r}{g} = \frac{1}{5}$ vagy $\frac{r}{g} = 5$ értéknél $a = 0.74$ vagyis 26%-ot veszítettünk az elérhető legnagyobb intenzitásból s ez a veszteség $\frac{r}{g} = 100$ vagy $\frac{r}{g} = \frac{1}{100}$ esetben már 80%-ra emelkedik.

Különösen fontos az $r=g$ föltétel betartása azon esetekben, mikor *kis izzólámpa* fölvilágításával akarjuk az indukált áram jelenlétét kimutatni. Ekkor ugyanis az áramerősség *négyzele* jön számításba s így az ilyen kísérleti összeállítás már aránylag kicsiny intenzitás változás iránt is érzékeny!

Eddigi megfontolásainkból világosan kitűnik, hogy *vékony* drót alkalmazása esetén már *alacsony menetszámnál* elérjük az $r=g$ határt, melyen túl a menetszám növelésének nincs többé értelme. Az ilyen vékony drótból készült tekercsek *ohmikus ellenállása* tehát túlságosan *nagy az induktív ellenálláshoz képest* s e miatt sem az extra áram demonstrálására, sem a transzformátor elvének kimutatására nem használhatók!

Ezenkívül még egy fontos körülmény szól a *vastag drót* alkalmazása s ezzel kapcsolatban *kis ellenállású áramjelzők* használata mellett. Ezen esetben ugyanis *adott feszültségű* áramforrás (galván elem!) mellett nagyobb lesz a tekercsben elérhető áramerősség, már pedig a mágneses helyzeti energia az ismert $\frac{1}{2} Li^2$ formula értelmében az intenzitással *rohamosan* növekszik!

Végeredményül tehát kimondhatjuk, hogy a túlságosan vékony drótból készült indukciós tekercsek elhibázott konstrukciók, melyek *specziális* célokat kivéve egyéb kísérletekhez nem használhatók s egyáltalán *alkalmatlanok az indukció és a váltakozó áramok jelenségeinek elegáns és föltűnő demonstrálására.*

II. A galvanométer megválasztásáról.

Sok kísérlet sikerét teszi tönkre a galvanométerek «érzékenységről» elterjedt téves felfogás, mely a galvanométerek *helytelen* megválasztására vezet. A galvanométerek «érzékenységet» ugyanis a gyárosok az 1° vagy 1 skálarész kitérésnek megfelelő áramerősséggel szokták megadni, de rendszeren bölcsen hallgatnak a műszer *belső ellenállásáról*. Pedig az ú. n. «áramérzékenység» megadása nemcsak nem nyújt fölvilágosítást a galvanométer hasznavehetőségéről, hanem egyenesen megtéveszti és félrevezeti az embert!

A sokat emlegetett «nagy érzékenységet» ugyanis rendszeren azáltal érik el, hogy a galvanométer tekercsét *sokmenetű vékony drótból* készítik s ezáltal ellenállását annyira megnövelik, hogy *túlnyomóvá* lesz az áramkör többi részének ellenállásához képest. Ekkor azonban *maga az érzékenynek* nevezett műszer *rontja le az elérhető áramerősséget* s arra a téves következtetésre vezet, hogy «íme a kérdéses jelenség (indukció, thermó-áram stb.) oly gyenge és jelentéktelen, hogy még *ezzel az érzékeny műszerrel is alig mutatható ki!*»

Allításunk igazsága kitűnik a következő összehasonlításból.

A berlini GANS és GOLDSCHMIDT czég Deprèz-typusú, nagy demonstrációs galvanométerének *belső ellenállása* 10 ohm és 10 milliampère áramerősségnél éri el legnagyobb kitérését; a HARTMANN és BRAUN frankfurti czég hasonló nagyságú készüléke *már két milliampèrenél* megadja ugyanazt a kitérést s így *látszólag* ötszörte érzékenyebb. A valóságban azonban mégis az előbbi műszer a hasznavehetőbb, mert míg a H. és B.-féle készülék *belső ellenállása* 100 ohm s így a két milliampère létesítésére $100 \times 2 = 200$ millivolt potenciálkülönbségre van szükség, addig a GANS és GOLDSCHMIDT-féle készüléknél ugyanazon kitérés létesítésére $10 \times 10 = 100$ millivolt már elegendő, vagyis «*volt-érzékenysége*» kétszer akkora.

Minthogy pedig a valóságban akár induktív, akár kémiai, akár termikus úton, de *mindig csak potenciálkülönbséget*

tudunk létesíteni, ennél fogva a galvanométerek megválasztásánál egyedül a *volt-érzékenység* lehet irányadó! A megadott áram-érzékenységet tehát vagy el kell osztani a belső ellenállással, vagy az *egy millivoltra eső kitérés nagyságát kell irányadóul venni.*

Még érdekesebb a dolog a régi fix-tekeresű galvanométereknél, hol mágnessű képviseli a lengőrendszert. Ezeknél a kitérés az ú. n. *ampèrmenetek számával*: az (ni) szorzattal arányos, Minthogy azonban n és i nem független változók, itt is tekintetbe kell vennünk a galvanométer g ellenállását! Az I. pontban láttuk, hogy a menetszám az ellenállás gyökével arányos, vagyis a jelen esetben \sqrt{g} -vel; az áramerősség viszont fordítva arányos az $(r+g)$ összes ellenállással s így a lengőtűs galvanométer kitérése végeredményben a

$$\frac{\sqrt{g}}{r+g}$$

kifejezéssel arányos. Ennek értéke pedig akkor a lehető legnagyobb, ha $r = g$.

Lengőtűs galvanométerek közül tehát különben azonos föltételek mellett az fogja adni a legnagyobb kitérést, melynek belső ellenállása egyenlő a zárókör többi részének ellenállásával.

Minthogy a középiskolai demonstrációs eszközök általában 1—2 ohm ellenállásúak s az indukciós kísérletekhez is a vastag drótból készült tekercsek a legalkalmasabbak, ebből következik, hogy a középiskolába általában *kis ellenállású* áramjelző készülékek valók, s ezt a körülményt a galvanométerek megválasztásánál nem szabad figyelmen kívül hagynunk.

Így az alább felsorolt kísérletekhez kitűnően használhatók a régi fajta lengőtűs, de *vastag* drótból készült ú. n. «érzékenlen» galvanométerek. Ha azonban lassú csillapodásuk kellemetlen volna, akkor föltétlenül Deprèz-rendszerű, megfelelően kis ellenállású forgótekercses készülék alkalmazandó!

III. Elveink alkalmazása az indukciós tekercs méretezésénél.

Minthogy az összes áramjelző készülékek (galvanométer, dinamométer, hődrót stb.) kitérését vagy egy izzólámpa föl-villanását a rajta átmenő áram *erőssége* szabja meg, ennél fogva az indukciós tekercs és a hozzá tartozó mellékkészülékek méretezésénél arra kell törekednünk, hogy az indukált elektromótoros erőnek *minél kisebb ellenállású* zárókör legyen az útjában, mert csak így remélhetünk föltűnő jelenségeket.

Ezenkívül azonban arról is kell gondoskodnunk, hogy a tekercs L önindukció-tényezője elegendő nagy legyen, mert különben hatása az ohmikus ellenállás mellett nem érvényesülhet kellőképen. *A menetszám és a drótvastagság tehát úgy választandó meg, hogy az ohmikus ellenállás egyenlő legyen az áramjelző ellenállásával s egyúttal elhanyagolható legyen az induktív ellenálláshoz képest.*

Ilyen megfontolások olyan nagyobb méretű indukciós tekercs konstruálására vezettek, mely várakozásainkat fényesen igazolta. Ennek segítségével *minden erősáramú villamforrástól függetlenül*, már két darab modern szalmiák elemmel¹ képesek vagyunk az indukció összes alapjelenségeit nemcsak föltűnően demonstrálni, hanem az *energetikai viszonyokról* is igen jó tájékozást nyújtani.

Így pl. izzított lágyvasdrótból készült vasmaggal tekercsünk önindukciója igen nagyra növelhető s így a mágneses helyzeti energia az $\frac{1}{2} Li^2$ képletnek megfelelően már *kis áramerősség* (3—4 ampère) mellett is oly nagyra lesz, hogy a megszakítás pillanatában fölszabadulva képes egy *100 voltos (!)* 10 gertyás volfrámlámpát egy pillanatra izzásba hozni, egy törpe izzólámpácskát pedig *vakító villanás közben* porrá égetni. Hogy

¹ Módosított Leclanche-elemek *cinkhengerrel*, agyagcella nélkül. A barnakövet vászonzacskó tartja össze s azért gyakran «zacskó-elem»-nek nevezik. Középiskolai célokra kitűnő, tiszta és kényelmes.

mily nagy energiamennyiséget tudunk ily módon az eltűnő mágnesetéből az ú. n. extra áram alakjában szabaddá tenni, legjobban mutatja az a körülmény, hogy egymásután következő gyors megszakítások esetén a *100 voltos lámpa állandó izzásba jó!* S mindezt produkáljuk *két* szalmiákelemmel! A hol pedig *váltakozó* áramú hálózat is áll a kísérletező rendelkezésére, ott remekül illusztrálhatjuk a transzformálás, az induktív ellenállás s az elektroinduktív taszítás és vonzás összes jelenségeit. A tekercs ezenkívül használható erős mágnes tér előállítására, sívító ívlámpához, dinamikai kísérletekhez stb.

A kísérleti összeállítás gyakorlati kivitelénél az eredetiség természetesen csak *a méretek helyes megválasztásában* rejlik, mert maguk a használatos eszközök és kísérletek *egynek kivételével* nagyobbrészt ismeretesek s a szakirodalomban elszórva találhatók.

A kísérleti összeállításhoz a következők szükségesek:

1. Nagy önindukciós tekercs, belső átmérője 5, külső átmérője 14, hossza 20 centiméter. Ebonit sablonra tekercselt, 15 ampèreig terhelhető *emaillezott* vörösrézdrótból készült 2×600 menettel. A két menet seriesbe, parallel vagy bifilárisan kapcsolható s így az önindukció és az ellenállás tág határok közt változtatható. Az átkapcsolás egy pillanat alatt elvégezhető specziális dugaszkapcsoló segítségével, mely a helytelen kapcsolást lehetetlenné teszi.

2. Hasonló kivitelű kisebb tekercs a transzformátor kísérletekhez, hosszméretben az előbbinek $\frac{1}{4}$ része.

3. Izzított lágyvasdrótból készült 45 cm hosszú, 5 cm átmérőjű vasmag ebonittal borítva.

4. Alumíniumhengerek az indukált áramok dinamikai hatásának kimutatására.

5. Megfelelő méretű izzólámpák.

Az említett eszközök MILAKOVSKY LÁSZLÓ tagtársunk esztergomi tanszergyárából kerültek ki igen csinos és praktikus kivitelben.

IV. Az előző összeállítással végezhető fontosabb kísérletek.

A) Az indukció alapjelenségeinek kimutatása.

Zárt vezetők esetén az indukció törvényét legcélszerűbb a FARADAY-MAXWELL-féle szabályba foglalni. E szabály didaktikai jelentősége azért nagy, mert a figyelmet a dolog lényegére: a *mágneses energiaváltozásra* tereli s az energetikai alap előtérbe helyezésével fölöslegessé teszi a «mágneses» és a «volta»-indukció megkülönböztetését.

Az alapjelenségek demonstrálásánál nagy indukciós tekercsünkhöz lehetőleg *kicsiny ellenállású* galvanométer veendő. Kitűnően használhatók a régi, vastagtekercsű «multiplikátorok», a SIEMENS és HALSKE, továbbá a GANS és GOLDSCHMIDT-féle demonstrációs univerzális galvanométerek, sőt a HARTMANN és BRAUN-féle közismert 100 ohmos készülék is jó eredményt ad, bár ezen esetben az $\frac{r}{g}$ viszony kedvezőtlen s így érzékenységet nem lehet teljesen kihasználni.

a) Állandó mágnesekkel kísérletezve egyáltalán nem szükséges gyors mozdulatokkal dolgozni, mert az indukált áram már *lassú* betoláskor is föltűnően jelentkezik. Tekercsünk indukcióérzékenysége ugyanis oly nagy, hogy már a *lágymas-mag remanens mágnessége* elegendő jól látható kitérés létesítésére a tekercsbe való betoláskor vagy kihúzáskor.

b) A nagy tekercset a lágvasmaggal, mint elektromágnest, a kisebbiket pedig mint indukált tekercset használva: ügyelni kell a zárás és nyitás indukciójánál a *megszakítás precizitására*. (Higany kontaktus alkohol alatt!) A zárás és nyitásnál a kis tekercsbe kapcsolt galvanométer *ellentétlen egyenlő* kitérést ad s ez a kitérés nem az áram erősségével, hanem a *mozgásba hozott elektromosság mennyiségével arányos!* Ilyen esetben ugyanis minden galvanométer *ballisztikus módon* reagál, mert lengésidejük nagy az indukciós áramlökés időtartamához képest.

c) Másrészt azonban igazolnunk kell azt is, hogy a rohamosabb változás következtében a nyitás indukciójának feszültsége s így a nyitási áram erőssége is *nagyobb* a zárásénál. Remekül illusztrálhatjuk ezt az intenzitásbeli különbséget a kis tekercsbe kapcsolt, megfelelően választott *kis fémszálas izzólámpával*, mely a megszakítás pillanatában fölvillan, a zárás tartama alatt azonban sötét marad (Induktor elve!) E kísérlethez két zacskóelem több, mint elegendő.

d) Most a két tekercsből álló rendszerben össze akarjuk hasonlítani az áramok irányát — *dinamikai hatásuk egyidejű bemutatásával*.

A menetszám *csökkentésével* s a drótkeresztmetszet egyidejű növelésével ugyanis módunkban van oly kis ellenállású, rövidre zárt szekundér tekercset készíteni, hogy a benne indukált áram intenzitása igen nagy értéket (50—100 ampère!) ér el. Ha most gondoskodunk arról, hogy az így nyert *egyetlen menetű* kis tekercs (= nagy keresztmetszetű alumíniumgyűrű, vagy henger!) ingaszerűen legyen fölfüggesztve, akkor már 3—4 ampère primér áramnál (= két-három zacskóelem!) oly nagy lesz a két áramrendszer kölcsönös ponderomotorikus hatása, hogy a vonzás vagy taszítás *föltűnően* fog nyilvánulni.

Okoskodásunkat a kísérlet fényesen igazolja. Az 1. ábra szerint kétszer bifilárisan fölfüggesztett *A* alumíniumhengert ugyanis a *zárás* pillanatában az *L* tekercs *hevesen eltaszítja*, a megszakítás pillanatában pedig *magához rántja*.

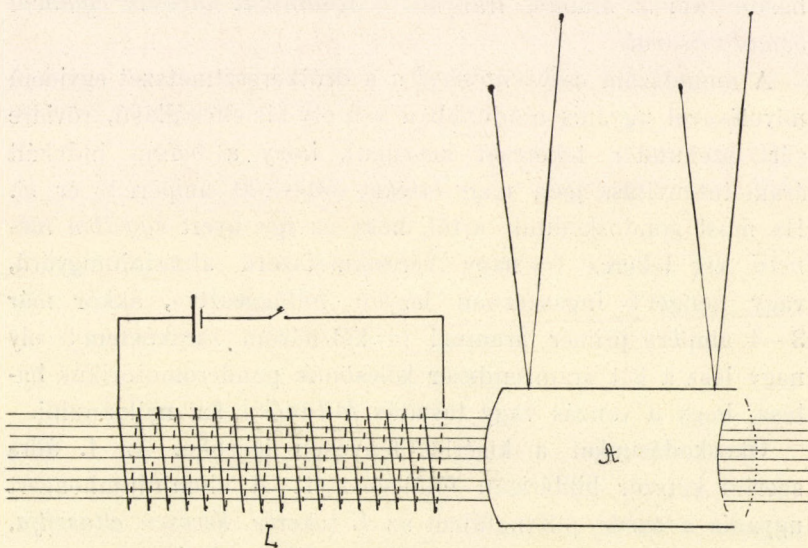
A zárást és nyitást megfelelő időközökben ismételve, az alumíniumhenger igen nagy kilengéseket fog végezni s a hatás *messziről* is igen jól látható.

Ez a rendkívül egyszerű és áttekinthető kísérlet *tudtommal új* s meggyőzően bizonyítja, hogy a ^{zárás}nyitás pillanatában az eredetivel ^{ellenkező}megegyező irányú áram keletkezik a szekundér tekercsben. Frappánsan bizonyítja továbbá azt is, hogy a két rendszerben az áramerősség változása *egyidejűleg* folyik le, mert máskülönben *nem jöhetne létre a dinamikai hatás*.

e) Az előző összeállítás igen alkalmas az *elektromágneses*

csillapítás új demonstrálására. A zárás indukciójának dinamikai hatása miatt eltaszított aluminium henger ugyanis a zárás további tartama alatt *aperiodikusan tér vissza nyugalmi helyzetébe*, mert a vasmag *mágnesterében* mozog. A megszakítás után ellenben *hosszú ideig leng* egyensúlyi helyzete körül, mert a szálsurlódás és a légszillapítás nem elegendők a mozgás megszüntetésére.

Ebből is látható, hogy ez az új kísérleti összeállítás sokoldalúsága miatt didaktikailag igen jól értékesíthető.



1. ábra.

f) A FARADAY-MAXWELL-féle szabály közvetlenül alkalmazható az önindukció jelenségére is! A zárás pillanatában a direkt árammal ellenkező, nyitáskor vele egyenlő irányú feszültség indukáltatik a tekercsben. A mozgásba hozott elektromosság energiája mindkét esetben $= \frac{1}{2} Li^2$, csak hogy a záráskor eloszlik az egész áramkör mentén, a megszakításkor ellenben túlnyomó része a nyitás helyére jut s e miatt könnyebben lesz kimutatható.

E végből a vasmaggal ellátott L nagy tekercs áramkörébe

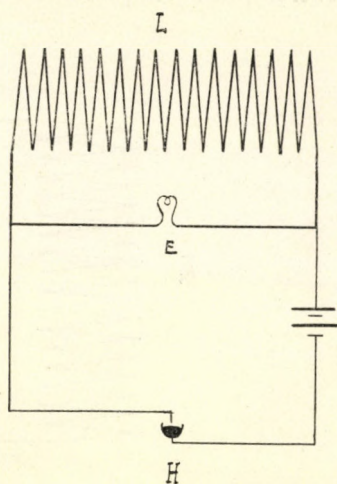
E kis izzólámpát kapcsolunk (2. ábra) s a csatlakozási helyhez kötjük az áramforrás sarkait. Az áramot H higanycsésze (vagy rugós pillanatkapcsoló) segítségével zárva: az áram elágazik. Túlnyomó része a vastagdrótú tekercsbe megy, a vékony izzólámpa-szálba ellenben alig jut valami s így a lámpa sötét marad. A megszakítás pillanatában azonban az eltűnő mágnes-tér energiája árammá alakul s izzólámpán keresztül zárt áramkörre találván, a lámpát vakító lobbanás mellett elégeti.

Ezzel a kísérlettel igazoltuk, hogy a megszakítás önindukciója sokkal nagyobb feszültségű a zárásénál, sőt az áramforrás feszültségét is sokszorosan fölülmúlja. Ugyanis 2-3 zacskó) elemet használva ismételt megszakítások (higanyos szakgató!) esetén képesek vagyunk egy 100 voltos 10 gyertyás fémszálas lámpát állandó izzásba, tartani, holott erre a direkt áramforrás feszültsége (3-4 volt) nem elegendő.

Izzólámpa helyett hajszálvékony drótot használva, a nyitás önindukciója *robbantásra*, vagy

kémiai kísérleteknél foszfor vagy gázkeverék *meggyújtására* használható azon esetben, ha a kéznél levő galvánelemek *direkt* árama nem elegendő a platinaszál izzásba hozatalára.

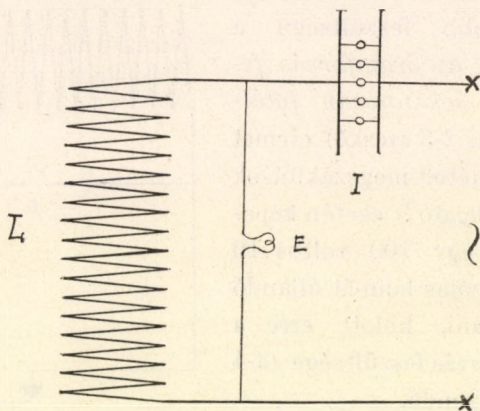
Ezek a kísérletek azért is tanulságosak, mert elejét veszik az önindukció esetleges lekicsinylésének. A lámpák fölvilágításából ugyanis kézzelfoghatóan láthatja a tanuló, hogy nem csekély energiamennyiség átalakulásáról van szó, ezenkívül a *mágnes-tér* fontossága is kellő hangsúlyozást nyerhet s éppen ez a körülmény teszi indokolttá a tekercs méreteinek fõntebb jelzett megválasztását.



2. ábra.

B) *A váltakozó mágnes tér jelenségei. Transzformátorok és az elektroinduktív tasztítás.*

a) Az indukció alapjelenségeinek bemutatása után minden különösebb nehézség nélkül át lehet térni a dinamógépek s ezekkel kapcsolatban a váltakozó áramok tárgyalására. Az utóbbiaknál igen *föltűnő módon* jelentkezik az *önindukció* szerepe, melynél fogva az áramerősség változásaival szemben a tekercs annál nagyobb *ellenelektromótoros erő*t fejt ki, minél



3. ábra.

nagyobb az önindukció tényezője. Ezzel kapcsolatban igen hatásos módon¹ demonstrálhatjuk a *vasmag* szerepét!

Ennek bemutatása céljából a váltakozó áramkörbe iktatjuk az L nagy tekercset (3. ábra) s áramjelzőül I izzólámpa ellenállást, vagy egyetlen *1000 gyertyás* fémszálas izzólámpát használunk. A tekercs elektromótoros erejének jelzésére 100 voltos 16 gyertyás E izzólámpa szolgál, mely voltamérő helyett a tekercs sarkaihoz párhuzamosan van kapcsolva.

Ha most a vasmagot a tekercsbe dugjuk, az áramjelző lámpa *kialszik*, a feszültségjelző ellenben *kigyullad*, éppen ez bizonyítja, hogy az elektromótoros ereje *ellen*e dolgozik a hálózati feszültségnek! holott a záró kör ohmikus ellenállása vál-

tozatlan maradt. Váltakozó áram esetén tehát a tekercsre jutó feszültségesést tisztán *elektromágneses úton* is módunkban áll szabályozni. Az OHM-féle törvény eredeti alakjában tehát nem használható az áramerősség meghatározására, hanem az induktív ellenállás is tekintetbe veendő (Fojtó tekercsek, feszültségosztók, indítók váltakozó áramú motorokhoz stb.)

Nagy tekercsünk induktív ellenállása egyébként a vasmag használatakor oly nagy, hogy 100—110 voltos váltakozó áramú hálózatra *direkt rákapcsolható*, a mikor körülbelül 15 ampère mágnesező áramot fogyaszt. (Ügyelni a biztosítékra!) A váltakozó mágnes tér ekkor oly erős, hogy a vasmagra gyakorolt vonzó hatása nagyobb a nehézségerőnél, vagyis *a tekercset a vasmagnál fogva a levegőbe lehet emelni*. Ezzel azután «kézzel-fogható» módon illusztrálhatjuk a lágyvasas ampèremérő elvét.

b) Előző kísérletünknel *tömör* vasmagot használva oly erősek lesznek a benne indukált örvényáramok, hogy a vasmag *néhány percz alatt* veszedelmesen fölmelegszik. Ezzel azután megadjuk a magyarázatát annak, miért kell a váltakozó áramú gépeknél és transzformátoroknál *lamellált vasat* alkalmazni.

c) Ha az 1000 gyertyás izzólámpát használva ellenállásul (v. ö. 3. ábra) a vasmag kiálló végére rátoljuk a kis tekercset, akkor a váltakozó mágnes tér erővonalai átjárják annak menetet s benne váltakozó irányú elektromótoros erőt indukálnak. Ha tehát a szekundér tekercsbe 15—20 voltos izzólámpát iktatunk, az világítani fog. Ezzel kapcsolatban azután megmagyarázható *a transzformátor elve*.

Most a *dinamikai* hatás segítségével meg fogjuk vizsgálni, milyen irányú a két tekercs árama egymáshoz viszonyítva [v. ö. A) d) kísérlettel.]

E végből az egyetlen menetű, könnyű II. tekercset, az aluminiumhengert tesszük a függőlegesen állított tekercs vasmagjára, s ime a I. tekercs *állandóan taszítja* azt. Ebből világosan következik, hogy *a I. és II. tekercsben az áramok iránya minden pillanatban ellenkező*, vagyis fáziskülönbségük közel 180° .

Az elektroinduktív taszítás jelensége tehát kiválóan alkalmas arra, hogy az áramok irányát a két tekercsben minden különös és drága műszer nélkül meghatározhassuk!

A zárás indukciója ennél a kísérletnél abban jelentkezik, hogy a I. tekercs a zárás pillanatában az alumíniumhengert fölérge a levegőbe, holott a stacionárius állapotban nem bírja a vasmag végéig sem emelni, mert ott az erővonalak erős szóródása miatt csekélyebb az indukció. Ez a kísérlet értékettes teszi, miért kell *erős áramú* váltakozó elektromotoroknál és transzformátoroknál az áramvezető tekercseket a szó szoros értelmében «lekötözni», aczélszalagokkal és ékekkel rögzíteni. Ellenkező esetben ugyanis *egyetlen erős áramlökés* elég volna arra, hogy *dinamikai hatásával* a vezetőket *kiemelje helyükből*, a mi kellemetlen üzemzavarokra adna alkalmat.

d) Kísérleti berendezésünkkel bemutatható az elektroinduktív vonzás tünete is. Tartsunk ugyanis a lebegő alumíniumhenger fölé egy *másikat*, akkor az alsó följebb fog emelkedni, mert a két hengerben *azonos irányú* váltakozó áram kering. A két henger kölcsönös vonzása annyira föltűnő, hogy alig lehet őket szétválasztani. Csak ha *igen magasra* emeljük a fölsőt (a vasmag végéig!), akkor válnak szét az indukált áramok gyöngülése következtében.

e) Az energetikai viszonyok igen hatásosan demonstrálhatók a következő módon. A 3. ábrán látható összeállítást használjuk az 1000 gyertyás 100 voltos wolfrám lámpával, de az *L* tekercs két alosztályát párhuzamosan kapcsoljuk. Ezáltal az önindukció felére csökken s így az áramjelző lámpa a vasmag betolása-kor nem alszik ki egészen, hanem vörösen izzik. Kézzel átfogva nyomjuk le most a lebegő alumíniumhengert egészen az *L* tekercs ebonit sablonjáig: akkor két igen érdekes tümenyt tapasztalunk.

1. A rendkívül erős (500—600 ampère!) de természetesen alacsony feszültségű indukált áramtól az alumíniumhenger néhány másodperc alatt annyira fölhevítettik, hogy kénytelenek

vagyunk eleresztteni.¹ A hőfejlődés oly nagy, hogy vízzel megtöltött üreges alumíniumgyűrűt használva, a víz hamarosan forrásba jő, Wood-féle ötvényből készült gyűrű pedig elolvad. Az utóbbi kísérlet frappánsan demonstrálja az *elektromos aczélgéartás* elvét, hol az olvasztandó vasércztömeg szerepel egy nagyteljesítményű transzformátor kis ellenállású (= nagy keresztmetszetű) II. tekercse gyanánt. A szekundérbe leadott elektromos energia *hővé* alakul s *egész tömegében* egyenletesen olvasztja meg a vasat. Minthogy az elérendő hőfok a I. feszültség változtatásával tetszés szerint szabályozható, ennél fogva minden öntés *azonos minőségű* aczélféleséget szolgáltat, ellentétben a Bessemer kohóval, melynél a siker pillanatokon múlik.

2. Ugyanezen kísérletnél világosan látható, hogy a szekundér tekercs növekvő terhelésével a *primér áramerősség* is nő, a mint azt az energia elve megkívánja. Mihelyt ugyanis a lebegő alumíniumhengert lenyomjuk, a vörösen izzott 1000 gyertyás lámpa *fényesebben kezd világítani*, ha azonban a hengert eleresztjük, a lámpa fényereje újra lecsökken.

Befejezésül *indirekt* kísérlettel igazolhatjuk, hogy az alumíniumhengeren jelentkező dinamikai hatások csakugyan az *áramok* kölcsönhatásának következményei. Ha ugyanis *hosszában felvágott* hengert használunk, a fől sorolt tünetmények mind elmaradnak, holott *feszültség* most is indukáltatik, a miről érzékeny elektrométerrel csakugyan meggyőződhetünk. Ha azonban a tekercs végeit összenyomjuk, vagyis az áramlást lehetővé tesszük, akkor a hőfejlődés és dinamikai hatás ismét jelentkezik.

Igen vastag, de lágy vasdrótból készült néhány szekundérmenet alkalmazásával bemutathatjuk az *elektromos hegesztés* elvét is. Ugyanis a jól lecsiszolt véglapokat fogókkal erősen összenyomva, az *átmeneti ellenállás miatt* a két drótvég anynyira fölhevül, hogy vörös izzásba jön és összeforrad.

¹ Egy percnyi kísérlet után a hengert vizkaloriméterbe dobva: meghatározzuk az (i^2rt) hőmennyiséget. Ebből i meghatározható, ha az alumínium fajlagos ellenállásából és a henger méreteiből (r)-et kiszámítjuk!

Az előzőekben felsorolt kísérletek világosan mutatják, hogy az összes középiskolai indukciós demonstrációk elvégezhetők egyetlen egy, helyesen méretezett tekercscsel, ha az áramjelzők és egyéb mellékkészülékek megválasztásánál tekintettel vagyunk az indukciós tekercs ohmikus ellenállására s az áramjelzők ellenállását azzal összhangba hozzuk.

Bodócs István.

A GÁTI-FÉLE BARRETTTER SEGÉLYÉVEL ESZKÖZÖLHETŐ ÚJ AÉRODINAMIKAI MÉRÉSI ELJÁRÁS.

GÁTI-féle barretter felhasználásával sikerült olyan mérési eljárást megállapítanom, melynek segélyével valamely mozgó gáz állapotjelzőit és sebességét egyes pontokon nagy pontossággal meg lehet határozni a nélkül, hogy az alkalmazott mérőeszköz a mozgó gáz állapotát megzavarná. Ezzel az eljárással a levegő sebességét 0.02 cm sec^{-1} pontossággal a levegő hőmérsékletét pedig 0.001° C pontossággal lehetett meghatározni; meg lehetett vizsgálni továbbá olyan problémákat, melyek az eddigi mérési eljárások segélyével megvizsgálhatók nem voltak.

1. §. Eddig nem volt ismeretes olyan kísérleti eljárás, melynek segélyével aërodinamikai folyamatnál egyes pontokban a mozgó gáz folyton változó állapotjelzőit és sebességét meg lehetett volna úgy határozni, hogy az alkalmazott mérőeszköz magát a gázmozgást ne befolyásolja, a mint pl. azt egy anemóméter beszerelése teszi.

A problémára vonatkozó évekre kiterjedő vizsgálataim közben sikerült erre a célra szolgáló mérési módszert találni.

Dolgozatom tárgya ez új eljárás ismertetése. Dolgozatom végén röviden megemlékszem azokról a kísérleti vizsgálatokról, melyeket ezzel az eljárással végeztem.

A mérési eljárás alapgondolata abban áll, hogy lineáris bolométert, egy GÁTI-féle barrettert helyezek el a mozgó gázban. Ez a barretter igen kicsi (0.5 mm hosszú, 0.0005 mm vastag WOLLASTON-drót), úgy hogy a mozgási viszonyokat nem zavarja. Ebben a barretterdrótban állandóan áram folyik, állan-

dóan bizonyos drótmeleg fejlődik, a drót tehát hőforrás, melynek hőmérséklete a hűlési viszonyoktól függ. E hűlési viszonyok lineáris gázmozgásnál és stacionárius állapotnál a környező gáz anyagi minőségétől, hőmérsékletétől, sebességétől, sűrűségétől, tehát általában bizonyos gázra gondolva, a gáz állapotjelzőitől és sebességétől függnék. Majd ki fogom mutatni, hogy a berendezés csekély tömeghatása miatt így van ez akkor is, ha a mozgásállapot nem stacionárius.

Mivel a drót ellenállása a hőmérséklettel változik: kompenzációs híd alkalmazásával és EINTHOVEN-féle galvanométerrel a barretter változó ellenállása regisztrálható. A galvanométer kitérése a gáz állapotjelzőitől és sebességétől fog függni. Ha egymás közelében három különböző barrettert helyezünk el, a három barretterrel kapcsolatos három galvanométer kitéréséből bizonyos grafikumok segítségével, egész általános esetben meg lehet határozni a gáz állapotjelzőit és sebességét.

Ha föl lehet tételezni, hogy a gáz két állapotjelzője között valami összefüggés áll fenn, pl. ha adiabatikus állapotváltozásról van szó, két barretter elegendő, mert ez esetben két mérésből az összes állapotjelzőket és a sebességet is meg lehet határozni.

Ha pedig a gázmozgás nem lineáris, a barretter hűlési viszonyai attól is függnék, hogy a levegő milyen irányból áramlik a barretterre, nem elég három barrettert alkalmazni, hanem mondjuk, a sebességnek a három koordináta tengely irányába eső komponensei, továbbá a gáz állapotjelzőinek meghatározására öt mérés, öt barretter szükséges.

Ezek előrebocsátása után most már a mérési eljárást a következőkben ismertetem.

2. §. Az eljárás alapgondolatára NEUSCHELER kísérletei juttattak, a ki lineáris bolométert helyezett el ajaksíp csomópontjában, hol tehát a levegő nyugalomban volt és a bolométer ellenállásának változásából a levegő temperaturaingadozására következtetett.

Már maga ez a NEUSCHLER-féle összeállítás elvben többé-

kevésbbé alkalmas hasonló vizsgálatokra, a mozgó gáz állapotjelzőinek és sebességének meghatározására, csak a bolométert nem kell a csomópontba, hanem egyszerűen a mozgó gázba elhelyezni.

Ha ugyanis ilyen bolométert mozgó levegőben helyezünk el, a bolométer drót hőmérséklete, mint már említettem, a mozgó levegő hőmérsékletétől, sűrűségétől és sebességétől fog függni.

Hogy ilyen bolométer drót hőmérséklete stacionárius állapot esetén a levegő sebességétől is függ, az mindenesetre ismeretes volt, hiszen a gondolat igen közelfekvő. A *Physikalische Zeitschrift*-ben — mint említettem — dr. GERDIEN publikált egy eszközről, melyet azóta SIEMENS és HALSKE-ék árjegyzékszerűen készítenek és mely sebesség mérésre szolgál. A készülék és az eljárás az enyémtől mindenesetre különbözik. A GERDIEN-féle eszköz nem alkalmas a gáz állapotának pontról-pontra való meghatározására, a célja is egészen más, de nem is olyan érzékeny. Úgy NEUSCHELER bolométere, mint GERDIEN «Hitzdraht»-jai egyetlen galvanométerrel állanak kapcsolatban, egy észleléssel azonban a gáz három állapotjelzőjét és sebességét nem lehet megállapítani. Azonkívül mind a két eszköz méretei sokkal nagyobbak, semhogy a gáz állapotjelzőinek és sebességének pontról-pontra való megfigyeléséről ily eszközök segélyével beszélni lehetne. Ezzel szemben a GÁTI-féle barretter,¹ a mit

¹ GÁTI: Die Empfindlichkeit des Barretters. (Phys. Ztschr. 1909, p. 897.)

Dämpfungsmessungen bei Telephonströmen. (Ztschr. für Schwachstromtechnik 1908. no. 11.)

La mesure de l'intensité des courants faible et de haute fréquence. (L'industrie Electrique 1913, p. 498.)

Beiträge zur Kenntnis des Barretters. (Phys. Ztschr. 1909, p. 322.)

Telefonáramok újabb vizsgálati módszerei. (Elektrotechnika 1909. no. 24.)

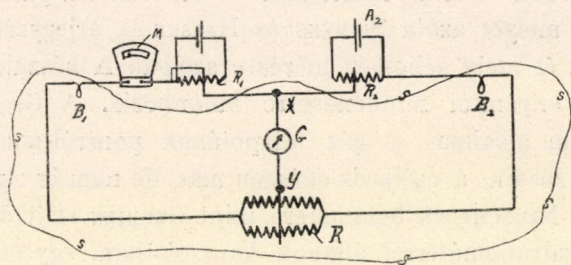
Einige Messversuche der ankommenden Ströme bei der drahtlosen Telegraphie. (Phys. Ztschr. 1907, no. 630.)

Ein neues Messgerät für schwache Wechselströme. (Elektrotechnische Ztschr. 1907, no. 4.)

Description et Utilisation de la methode pour la mesure des constants de ligne au moyen du Barretter.

használtam, bár az is mint ismeretes bolométer, csak 0.5 mm hosszú és 0.0005 mm vastag, tehát oly kicsi, hogy ennél az eszköznél tényleg szó lehet pontról-pontra való mérésről. Azonkívül ez a barretter teljesen átkonstruált pontos, megbízható és érzékeny, mérésre közvetlenül alkalmas szerkezet, sokkal tökéletesebb, mint az említettek.

A mérési eljárás elve, ezek szerint, egyszerűen abban áll, hogy a mozgó gázban lehetőleg közel egymáshoz elhelyezzek két vagy három GÁTI-féle barrettert, melyek ellenállásának változását EINTHOVEN-féle galvanométerrel regisztrálom, a nyert



1. ábra.

görbékéből bizonyos meggondolások segélyével nagy pontossággal (0.001°C a hőmérséklemérésnél és 0.2 cm sec^{-1} a sebességmérésnél) meg lehet határozni a mozgó gáz hőmérsékletét, sűrűségét és sebességét.

Ezen az alapon tehát a mérési berendezés tulajdonképpen három egymástól teljesen független barretter-mérési készletből áll: mindegyik berendezés arra szolgál, hogy egy-egy barretter ellenállását a kompenzációs hid elve alapján megállapítsa. Ilyen kompenzációs hid sémáját a mellékelt ábra (1. ábra) tünteti fel. A berendezés két barretterből, két akkumulátorból, két csúszó reosztátból, egy milliampèremérőből és egy galvanométerből vagy mikroampèremérőből áll.

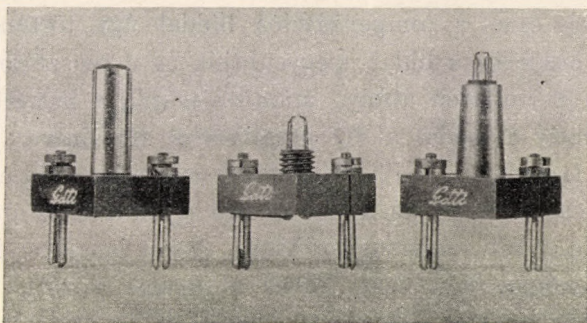
A kompenzációs hid működése a mellékelt kapcsolási vázlat alapján a következő: az A_1 akkumulátor az R_1 reosztáttal rövidre van zárva; az áram az R_1 reosztát csúsztatójából M

milliampèremérőn B_1 barretteren át R reosztáthoz, majd ennek csúsztatójából a G galvanométerre és innen R_1 reosztát csúsztatójára visszajut. Hasonlóképen az A_2 akkumulátor az R_2 reosztáttal van rövidre zárva és az áram ennek csúsztatójáról B_2 barretteren és R reosztáton át ugyanarra a csúsztatóra kerül és innen G galvanométeren keresztül az R_2 reosztátra jut vissza. Ha az X és Y pontok között nincs potenciálkülönbség, tehát a hid két ágában a feszültségesés egyenlő, akkor a galvanométer nem mutat kitérést.

A mérés ezzel a kompenzációs hiddal úgy történik, hogy a mérés kezdetén a hidat kiegyenlítjük és a reosztátokkal beállítjuk a barretteren átfolyó áram erősségét, a barretter alapáramát, mely a mérés alatt, promillektől eltekintve, állandó; ez áram erősségét a milliampèremérő adja meg. Elég egy milliampèremérő is, mert ha a hid ki van egyenlítve, az áram erőssége mind a két ágban ugyanakkora. A két barretter közül az egyik állandóan ugyanazon hűlési viszonyok között, hőszigetelő köpenyben van elhelyezve, a másik pedig szabadon áll az áramló gázban. Ha a mozgó levegőben elhelyezett barretter hűlési viszonyai megváltoznak, ellenállása kis mértékben, promillekben megváltozik, ennek megfelelőképen a galvanométer fel fogja tüntetni, hogy rajta bizonyos mikroampère erősségű áram megy át. A méréssel nem határozzuk meg a barretter ellenállását, a hidat nem egyenlítjük mindig ki, hanem csak a barretter ellenállásának megváltozása következtében a galvanométeren át folyó áramerősséget határozzuk meg. A galvanométer kitérése minden esetre a gáz állapotjelzőitől és sebességétől fog függni.

3. §. A mérő barretterdrótot a lineáris gázmozgás színhelyét képező csőben a következő módon applikáltam. Miként talán ismeretes, a GÁTI-készüléknél (2. ábra) mindkét barretter egy kis állványra van szerelve, a melyik kettősdugós kontaktussal erősíthető be a készülékbe. Ennek a kis állványnak fotografiáját *2a*, *2b*, *2c* ábrák mutatják. A *2a* fotográfia feltünteti az állványt, a *2b* fotográfia ugyanezt az állványt, ha a barretterről a

hőszigetelő burát lecsavarjuk. Az applikálást illetőleg a legközelebb fekvő gondolat, a mi azután a kivitelnél be is vált, az volt, hogy miként a 2c fotográfia mutatja, a védőburok tetejét le kell reszelni és a megmaradó csontot kúposra esztergálva, az egész kis állványt egy hengeres csőhöz hozzáfarrasztott és belülről megfelelően kúposra esztergált csőbe kell szorítani. Így, miként azt a 2d ábra feltünteti, a barretter-drót a hosszú cső közepén foglal helyet és a kúpok érintkezé-



2a. ábra. 2b. ábra. 2c. ábra.

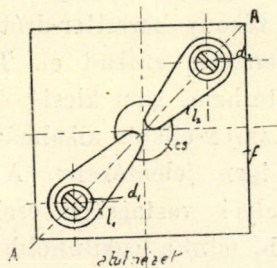
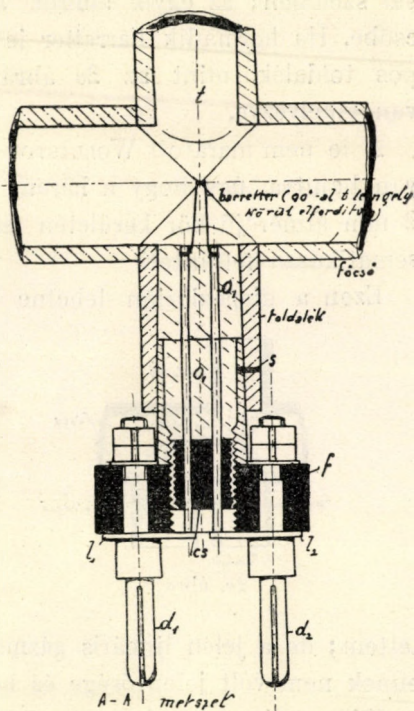
sénél keletkező surlódás az egész állványt fenntartja, de azért még a szerkezetet helyzetében az s sasszög is biztosítja.

A mi már most a részleteket illeti, az állvány gerinczét egy négyszögletes f fiberlap képezi (2d ábra). Ennek a fiberlapnak közepéből egy ugyancsak fiberből készült csavarorsó van csavarva, ez a cs csavarorsó épen olyan hosszú, mint a milyen a négyszögletes lap vastagsága, de nincs egészen becsavarva, hanem mintegy 3 mm-nyire kiáll. A cs orsón keresztül van húzva két o_1 és o_1 sárgarézdrót, a melyek felső végére a barretter drótot forrasztják, alsó végük pedig ugyancsak hozzájuk forrasztott l_1 , l_2 lemezek segítségével a dugós kontaktust képező d_1 , d_2 dugókkal áll kapcsolatban. A cs csavar szabadon álló meneteire rá lehet csavarni azt a kívülről kúposra esztergált sárgaréz-csavartokot, a mely majd a hosszú cső toldalékcsővébe fog illeszkedni.

Végül az o_1 , o_1 drótok felső részére forrasztják a barretter-drótot olyképen, hogy a még ezüstitől meg nem fosztott WOLLASTON-drótból megfelelő nagyságú ívet készítenek, az ív középső részét vízszintesre hajlítják és a drót végeit egy forrasztó pasztával (tinol) az oszlopokhoz forrasztják. Mikor a forrasztás megtörtént, az ív középső vízszintes részén az ezüstit a platinabéllel ellátott drótról hígított salétromsavval leéltetik, majd vízzel készült szódaoldattal a dróton hátramaradt savat neutralizálják. Ez az egész rendkívül kényes művelet és ha nem történik elég gondnal, akkor a dróton sav marad vissza, a mely a barrettert rövid idő alatt elpusztítja. Az egész készülék Budapesten GÁTI tanácsos úr felügyelete alatt készült.

A mikor a barrettert így a csőbe helyezzük, a csövet belülről viasszal kikenjük úgy, hogy az belülről hengeres legyen és a csőbe csak a barretter és a le nem mart WOLLASTON-drót nyúlik be. Ez

a vékony drótv a mozgást nem zavarja s mint az ábra mutatja, úgy van elhelyezve, hogy a cső keresztmetszetében foglaljon helyet, a barretter tehát vízszintes és a cső tengelyére merőleges legyen.

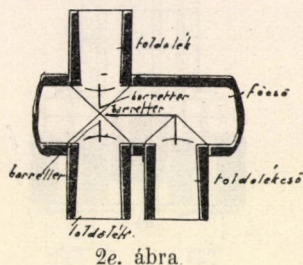


2d. ábra.

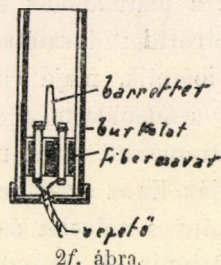
Mikor több barrettert kell a mérések alkalmával felhasználni, ezek a barretterek úgy vannak elhelyezve, hogy kettő egymással szemben: az egyik alulról, a másik felülről nyúlik be a csőbe. Ha harmadik barretter is kell, az ennek megfelelő kúpos toldalék, mint az 2e ábrán látható, valamivel hátrább van elhelyezve.

A le nem maratott WOLLASTON-drót ennél a barretternél megvan hajlítva, úgy hogy a három barretter középső részei egy 2 mm átmérőjű kör kerületén fekszenek, a mint azt a 2e ábra sematikusan feltűnteti.

Ezen a dispozición lehetne változtatni, azt meg is kísér-



2e. ábra.



2f. ábra.

tettem; de a jelen lineáris gázmozgások kísérleti vizsgálatánál ennek nem volt jelentősége és befolyása.

Még megjegyzem, hogy kezdetben meglepett az a körülmény, hogy a vékony barretter-drót nagy sebességű ($40,000 \text{ cmsec}^{-1}$) levegőben sem szakad el. Tényleg azonban a mozgó levegő okozta terhelés igen kicsi¹ és az ilyen drót szilárdsága, mivel a WOLLASTON-eljárás alkalmával rendkívül erősen át volt munkálva, igen jelentékeny. A gőzekéknél használt húzott drótok, melyek vastagsága csak 0.4 mm, szilárdsága öt-hatszor nagyobb, mint a legkitünőbb aczélé, így az ilyen igen vékonyra elkészített WOLLASTON-drót is sokkal szilárdabb, mint a nagyobb darabokban készült platina. Ez a jelenség a mechanikai technológiában már régi idő óta ismeretes.

Még bemutatok egy rajzot (2f), a mely oly barretter-

¹ L. Lineáris Gázmozgások 33. o.

elrendezést ábrázol, melynél a barretter nem volt szabadon a levegőben elhelyezve, hanem védőköpenynyel úgy volt körülvéve, hogy a külső levegő nyomása a köpeny nyílásán behatolhatott a barretterre, de a barretter maga a mozgó levegő hűtő hatásától meg volt védve. Ilyen barretternél, a mire még ráterek, a feszültségek változását közvetlenül lehet mérni.

4. §. Galvanométerül az EDELMANN gyártmányú EINTHOVEN-galvanométert¹ használtam és pedig kezdetben a beállításoknál a nagyobb typust, a rendes méréseknél azonban teljesen elegendő érzékeny volt a kisebbik, melynek tömeghatása különben is kisebb a nagyobb typusú eszköz tömeghatásánál. A fotografáláshoz és vizuális észleléshez ugyancsak EDELMANN gyártmányú hengeres lencsekerékkel ellátott és óraművel hajtott fotografáló-készüléket használtam fel. A galvanométer mágnesezésére két akkumulátor szolgált. A mi az EINTHOVEN-galvanométernél használt szálakat illeti, ezek is itt készültek Budapesten. A szálakhoz kivétel nélkül WOLLASTON-drótot használtam fel, de nem mindig platinát, hanem bizonyos esetekben aranyszálakat.

Stacionárius állapotok megfigyelésénél czélszerűen alkalmazhattam az egyenesen barrettermérések czéljaira GÁTI tanácsos úr előírása szerint készült E. W. PAUL-féle angol gyártmányú DEPREZ-rendszerű mikroampèremérőt, melynek érzékenysége 10^{-7} ampère és mely a méréshez szükséges shuntökkel, a melyekkel a galvanométer érzékenységét csökkenteni és a mérés tartományát kiterjeszteni lehet, össze van építve. A galvanométer skálája 12 mikroampérere terjed ki és körülbelül 20 cm hosszú. A galvanométer ellenállása 18°C -nál $300\ \Omega$. A PAUL-féle mikroampèremérő előnye, hogy biztos és könnyen kezelhető. A mikroampèremérővel a szabadban, mozgó tárgyakon² is lehet vizsgálatokat végezni olyan helyeken, hol az

¹ W. EINTHOVEN: Ein neues Galvanometer. (Ann. d. Phys. 1903.)

Weitere Untersuchungen über die Anwendung des Saitengalvanometers. (Ann. Phys. 1906, p. 483. és p. 665.)

² Pl. üzemben levő lokomotivon.

EINTHOVEN alkalmazásáról szó sem lehet, a leolvasás is sokkal egyszerűbb. Ha tehát oszcillografikus felvételre szükség nincs, ez a mérőeszköz sokkal czélszerűbb.

5. §. Ennek a fentebbi műszerekből álló összeállításnak és az egész GÁTI-féle kompenzációs elrendezésnek két előnye van, a mely miatt okvetlenül jobban működik, mint a WHEATSTONE-hid.

A WHEATSTONE-hídnál a különböző kontaktusok helyein olyan folyamatok lépnek föl, melyek a mérést zavarják és melyek figyelembevételre úgyis szólván lehetetlen, míg a kompenzációs elrendezésnél ezek a befolyások úgyis szólván teljesen kiesnek, mert az elrendezés szimmetrikus lévén, az egyik befolyásnak egy másik ellentétes befolyás felel meg a másik oldalon és a kettő egymást kiegyenlíti. Dr. GERDIEN is említett cikkében annak véleményének ad kifejezést, hogy az ilyen bolométer-méréseket könnyűszerrel csak kompenzációs elrendezéssel vihetünk végbe. Ezenkívül ezzel az elrendezéssel a mérésnél a galvanométer nullpontját a legtágabb határok között be lehet állítani. A reosztát elcsúsztatásával el lehet érni, hogy 0 foknál, vagy 500 foknál, vagy 1000 foknál ne mutasson a galvanométer kitérést és mindezeknél az ellátásoknál a mérési berendezés érzékenysége úgyis szólván semmit ne változzon. A mi a fémkontaktusok különböző hatásainak kiegyenlítését illeti, arra csak egy példát említek: pl. ha az észlelő közel állana a készülékhez és animális melege egy drótszorítóban vagy dugós kontaktusban termoelektikus eredetű áramot keltene, ugyanígy keltene a másik oldalon megfelelő másik kontaktusban egy ellentétes irányú áramot és a kettő hatása egymást közömbösítené. Ez a körülmény igen fontos, mert WHEATSTONE-hidat ezek miatt a jelenségek miatt ilyen méréseknél sohasem lehet kiegyenlíteni; a galvanométer sohasem marad nyugodtan. Ennél az összeállításnál pedig a kompenzáció miatt a galvanométer nem mozog.

Ezek a termoelektikus áramok különben az ennél a mérésnél föllépő maximális áramintenzitásokhoz képest olyan nagyok,

hogya ezek hatása nincsen kompenzálva, a mérést többé-kevésbé illuzóriusnak lehet tekinteni.

A mi az elrendezés másik előnyét illeti, hogy tág határok között körülbelül ugyanazzal az érzékenységgel lehet dolgozni, annak az oka, hogy a barretter alapárama (3—30 milliampère) az az áram, a melyik a barretteren átfolyik, a nagyság rendjét illetőleg nem változik. A mi a legnagyobb előforduló áramerősség ingadozást illeti, arra például azt hozom fel, hogy egy 30 milliampères barretterben az áramerősség mindössze 6 mikroampèrerel emelkedik, ha a barrettert 0 fokról 1000 fokra melegítjük. Így az egész összeállítás áram és ellenállás viszonyai a mérés alatt nagyon kevésbé változnak, az ellenállása pedig ezek között a temperaturahatárok között nem változik annyira, hogy az érzékenység nagyságrendje e miatt megváltoznék.

Ha tehát bizonyos mérésnél az ingadozás nagyobb, mint a mi a legnagyobb érzékenység mellett a galvanométer skáláján észlelhető, vagy például az EINTHOVEN-galvanométer fényképező-készülékének 5 cm széles papírszalagján fölvehető volna, akkor, ha nem akarjuk az egész ingadozást kisebb érzékenységgel, például a galvanométer shuntölésével fölvenni, hanem megelégszünk a változás egy részének nagyobb érzékenységgel való föl vételével, a nullpont elállítását alkalmazzuk. Például sebességet akarunk mérni oly folyamatnál, melynél a sebesség 0 és 90 méter között ingadozik, akkor például nagy érzékenységgel mérhetünk 89·5 és 90 m között, ha a galvanométert nullára hozzuk, midőn a barretter 89·5 méter sebességű levegőben van.

6. §. Az előzőekben a barretterrel történő mérés eljárásához szükséges műszereket és az egész kísérleti berendezés összeállítását bemutattam. Mivel a készülékkel mozgó gáz állapotjelzőit és sebességét akarjuk meghatározni, mindenekelőtt azt kell indokolni, hogy ez az összeállítás ilyen mérésekre tényleg alkalmas.

Mint majd a kísérleti részben bátor leszek rátérni, arról

közvetlenül meg lehet győződni, hogy mihelyest a barrettert körülvevő gáz állapotjelzői és sebessége megváltoznak, tehát a lehűlési viszonyok csak kissé mások is lesznek, az elrendezésnél szereplő galvanométer kitérése is megváltozik. Bizonyos elméleti fejtegetések révén meg lehet győződni, hogy ez az összeállítás tényleg alkalmas a gáz állapotjelzőinek és sebességének meghatározására. Ezek a fejtegetések bizonyos útmutatást is fognak adni, hogy a kísérleti vizsgálatokkal teljes kapcsolatban meg lehessen állapítani a módot, a melylyel ebből a galvanométer-kitérésből a gáz állapotjelzőit ki lehet értékelni.

A kérdés megítélésére a barrettermérésnél föllépő fizikai folyamatot kell megvizsgálni. Tekintettel arra, hogy a barretterdrót tulajdonképpen elektromos fűtőtest, ennél a vizsgálatnál föl lehet használni azokat a megközelítő formulákat, melyeket a fűtőtechnika nagy mennyiségű tapasztalati adatai alapján állítottak föl. Ezek a formulák a kísérleti adatokból többé-kevésbbé empirikus úton szűrődtek le, de oly tökéletesek, hogy olyan esetekben, hol nagy berendezések használhatósága vagy használhatatlansága ezektől a formuláktól függött, ezek alapján számítottak és számítanak és pedig teljes sikerrel. Továbbá meg lehet kísértetni a teoretikus fizika segédeszközeit felhasználni. A mi a teoretikus fejtegetést illeti, ennek szempontjából a barrettermérésnél föllépő fizikai folyamat rendkívül komplikált. A barretterben keletkezett drótmeleg háromféle módon is juthat a környezetbe, ú. m. sugárzás, vezetés és áramlás útján. Ez áramlás is tulajdonképpen kétféle természetű, egyrészt a barretter melegíti a fölötte lévő gázt és így a melegítés folytán beállott sűrűségkülönbségek miatt áramlás keletkezik, de a barretter mozgó levegőben is lehet elhelyezve, úgy hogy a levegő így a barrettertől függetlenül más okból is mozog és azonkívül ezt a mozgást a konvekció is befolyásolja.

A mi első sorban a teoriát illeti, ennél a folyamatnál sem a NEWTON, sem a DULONG-PETIT-féle vizsgálatok eredményeit nem lehet felhasználni, mert hiszen mind a kettő csak empi-

rikus formulák jellegével bir és ép azokra a részletekre nem terjeszkednek ki, a mi a jelen szempontból fontos; az áramlás közben beálló lehűlésre azonban ilyen, de csak stacionárius lehűlési folyamatok elméletével foglalkozott BOUSSINESQ.¹ Azoknak a föltevéseknek a teljesülésére, melyeket BOUSSINESQ az elmélet kifejtésénél felhasznált, a barrettermérésnél lehet számítani, úgy hogy az elmélet mindazokra a körülményekre, melyeket az előbb körvonaloztam, felvilágosítással szolgál, sőt egy bizonyos megoldás segélyével a nem stacionárius folyamatra is át lehet vinni az eredményt.

A BOUSSINESQ-féle vizsgálatok eredményeit közvetlenül felhasználva a következő összefüggést lehet megállapítani a gáz állapotjelzői és sebessége, továbbá a galvanométer kitérése között.

$$u + \frac{a^2 q^{-1}}{\sqrt{v\rho}} u_b(\Delta i), \quad (1)$$

hol u a mozgó gáz hőmérséklete, a a barretter méreteitől a mozgó gáz fizikai állandóitól függő konstans, q a barretterben egy másodperc alatt fejlődő drótmeleg, ρ a gáz sűrűsége v a mozgó gáz sebessége. $u_b(\Delta i)$ a barretter hőmérséklete a galvanométeren átfolyó Δi áram, a galvanométer kitérésének függvényében. Ez utóbbi összefüggést úgy kell érteni, hogy minden barretter hőmérsékletnek megfelel a barretter bizonyos ellenállása, bizonyos barretterellenállás mellett pedig bizonyos meghatározott Δi intenzitású áram fog a kompenzációs hid galvanométerén átfolyni.

A barretternél fellépő viszonyok jellemzésére fel lehet használni egy a fűtőtechnikában használatos² formulát is. Ez a formula azt fejezi ki, hogy egy fűtőtestből a környezetbe átszármazó meleg q a test felületével (F) a test és a környezet

¹ C. R. 1900, 132. k., p. 1382; 1901, 133. k., p. 257; 1904, 138. k., p. 1134., 1904, 138. k., p. 1150.

² Dr. ing. H. RIETSCHEL: Leitfaden zum Berechnen und Entwerfen von Lüftungs- und Heizungs-Anlagen. Berlin, 1913. (I. p. 139.)

közötti hőmérsékletkülönbséggel $(u - U)$ és egy melegátszarmaztatási együtthatóval (k) arányos, mely együttható viszont a sebesség (v) quadratikusan függvényével közelíthető meg.

$$k = K_0 + K_1 v + K_2 v^2 \quad (2)$$

hol K_0 , K_1 és K_2 különféle állandó, úgy, hogy

$$q = (K_0 + K_1 v + K_2 v^2) F(u - U) \quad (3)$$

ez az egyenlet levegőre és pedig normális állapotú levegőre vonatkozik. A kifejezés mindenestre eltér a BOUSSINESQ-félétől, azonban a quadratikusan függvényt úgy lehet felfogni, mint a BOUSSINESQ-nél szereplő négyzetgyökös kifejezést szűk határok között helyettesítő közelítő függvényt.

Miként említettem, mindezek a fejtegetések stacionárius állapotra vonatkoznak; ezeket tehát változó állapotok mellett eszközölt mérésekre csak akkor lehet felhasználni, ha meg lehet győződni arról, hogy a barretter érdemlegesen mégis úgy viselkedik, a barretterrel kapcsolatos galvanométer mégis azt a kitérést mutatja, mintha a mérés helyén és a mérés időpillanatában föllépő állapot stacionáriusan állna fenn. Ennek beigazolására talán elegendő annak az időnek nagyságrendjét meghatározni, mely alatt (egy abruptan alkalmazott terhelés esetén) a barretterben és a barretter környezetén föllépő fizikai folyamat érdemlegesen stacionáriussá válik, ha a levegő egy stacionárius állapotból ugrásszerűleg egy másikba megy át.

Ez idő nagyságrendjét például úgy állapíthatjuk meg, hogy meghatározzuk, hogy a barretterben fejlődő drótmeleg mennyi idő alatt tudná a barretter körüli fizikai folyamatban érdemlegesen résztvevő levegőmennyiség hőmérsékletét azzal a legmagasabb temperaturadifferenciával emelni, mely hőmérsékletkülönbség a barretter-drót és a levegő között a normális viszonyok mellett elő szokott állani. A folyamatban érdemlegesen résztvevő levegő tömegét például úgy állapíthatjuk meg, hogy a barrettet megnyúlt forgási ellipszoidnak tekintjük és föltételezzük, hogy a barretter a levegőnek csak vezetés útján ad

át meleget és kikeressük annak az ellipszoidnak köbtartalmát, a mely ellipszoidon stacionárius állapot esetén a temperatura a barretter felületén föllépő hőmérséklet fele. Ezek mellett a képzelhető legkedvezőtlenebb lehülési viszonyok mellett az a felület, a melyen a temperatura a barretter hőmérsékletének fele, sokkal távolabb van a barrettertől, sokkal nagyobb ez a felület, sokkal nagyobb a levegő köbtartalma, a mit ez a felület bezár, mint a tényleges hülési viszonyok mellett volna.

A számítás¹ végeredménye $6.2 \cdot 10^{-7}$ sec.: a keresett időnek nagyságrendje tehát 10^{-6} c. g. s. GÁTI tanácsos úr tapasztalatai szerint ez az idő 10^{-4} sec-nél kisebb. Mivel pedig NEUSCHELER szerint ugyanez az idő az EINTHOVENNÉL $4 \cdot 10^{-3}$ sec, tehát ugyanazon az alapon, a mint ő sem alkalmazott korrekciót eszközének tömeghatása miatt, ez a korrekció a barretternél sem szükséges.

Mindezek alapján úgy gondolom el lehet fogadni, hogy lineáris mozgásnál a galvanométer Δi mikroampère kitérése a gáz állapotjelzőitől és sebességétől függ

$$\Delta i = \Delta i(\rho, u, v).$$

Tehát ha a lineáris gázmozgásról van szó, midőn föltételezzük, hogy a sebesség mindig egy és ugyanazon irányban esik és egyelőre stacionárius állapotra gondolunk, akkor ezek alapján a barrettert, mint a termodinamikai állapot mérésére szolgáló műszert használhatjuk, mert, ha három barrettert helyezünk el, melyek különböző ellenállásúak és melyek méretei általában különbözőek, e barretterek hülési viszonyai különbözni fognak, mind a három barretternek általában véve különböző hőmérséklete, különböző ellenállása lesz. Így a három barretterrel kapcsolatos három galvanométer három különböző kitérést ad, ebből a három mérési adathból bizonyos megfontolások segélyével meg lehet határozni a gáz három állapot-

¹ A számítás kifejtettem Lineáris gázmozgások című értekezésem 45—49. oldalán.

jelzőjét és sebességét. Ennek a meghatározásnak igen sok módját lehet elgondolni; én a megoldást grafikus úton kísérltem meg.

7. §. A következőkben erről a grafikus eljárásról szólok, melynek segélyével ebből a három mérési adatból a gáz állapotjelzőjét és sebességét meg lehet határozni. Az eljárás egyszerűbb, midőn föl lehet tételezni, hogy az u hőmérséklet és ρ sűrűség között összefüggés áll fenn, pl. föl lehet tételezni, hogy a gáz sűrűsége megközelítőleg állandó vagy föl lehet tételezni, hogy az állapotváltozás adiabatikus, mely esetekben, a galvanométer kitérése szintén csak két változótól fog függeni.

Hogy akkor, ha a sűrűség igen szűk határok között ingadozik, a galvanométer kitérése csak az u hőmérséklettől, valamint a sűrűség és a sebesség szorzatától, a ρv -től függ, azt további vizsgálat tárgyává nem kellene tenni, ha BOUSSINESQ-féle elmélet a valóságot teljesen visszatükrözné,

$$u + \frac{a^2 q^{-1}}{\sqrt{\rho v}} = u_b (\Delta i),$$

mivel pedig a barretter-drót u_b hőmérséklete a galvanométer kitérésének Δi -nek függvénye, tehát viszont a Δi galvanométerkitérést az említett két változó függvényének lehet tekinteni:

$$\Delta i = \Delta i (u, \rho v).$$

Kísérleti úton azonban minden kétséget kizárólag meg lehet győződni, hogy ezek között a határok között a galvanométer kitérése az u hőmérséklet és a ρv szorzat függvényének tekinthető.

A kísérleti vizsgálatok körében, melyeket végeztem, a sűrűség-ingadozás a közepes sűrűséghez viszonyítva, annak 2%-ánál nem nagyobb. A sebesség legnagyobb értéke pedig nem lépi túl a 300 cm sec⁻¹-et. Így a ρ sűrűség ingadozásának befolyása a ρv szorzatra 0.02.300 = 6 cm sec⁻² a mérés érzékenységeinek határához közel van, úgy hogy a meggondolások értelmében a Δi kitérést bizonyos közelítéssel a levegő u hőmérséklete és a sebesség függvényének is lehetne ez alapon tekinteni.

Ha viszont adiabatikusnak lehet az állapotváltozást föltételezni és azt lehet mondani, hogy $u\rho^{1-k} = \text{konst.}$, akkor az a kitérés két változótól fog függeni, a gáz u hőmérsékletétől és a v sebességtől, mert hiszen az u hőmérsékletből adiabatikus állapotváltozás esetén a gáz összes állapotjelzőit meg lehet határozni és ha még a v sebességet megadjuk, mindazok a tényezők meg vannak állapítva, melyektől a melegátszármaztatás és így a galvanométer kitérése függ, úgy hogy ez esetben a Δi mikroampère-kitérés tulajdonképen ennek a két független változónak u és v -nek volna a függvénye, tehát

$$\Delta i = \Delta i(u, v).$$

Ez esetekben egy geometriai analógiával ezeket a

$$\Delta i = \Delta i(u, \rho v) \quad \text{és} \quad \Delta i = \Delta i(u, v)$$

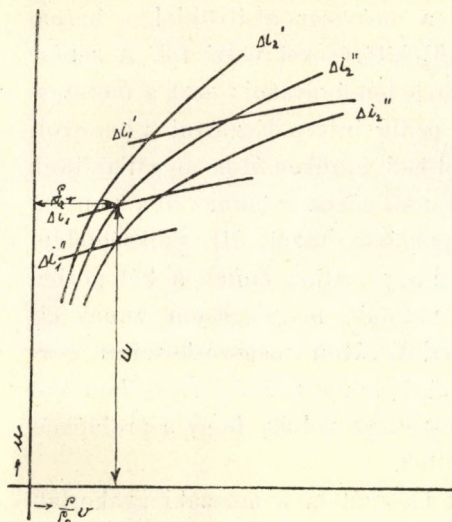
összefüggéseket felülettel ábrázolhatjuk olyképen, hogy például első esetben, mely eset premisszáinak bekövetkezését az értekezés tárgyát képező vizsgálatoknál fel lehetett tételezni és a mely eseteket feltételezve hajtottam végre a vizsgálatokat, az u és $u\rho$ -t derékszögű koordinátáknak tekinthetjük, minden egyes $u, \rho v$ értékrendszernek megfelelő ponton merőlegest emelve, erre felviszszük a galvanométer $u, \rho v$ értékrendszerhez tartozó Δi kitérését, tehát a felület tulajdonképen ezeket a kitéréseket ábrázolja. Ha most ezt a felületet vízszintes síkokkal metszve képzeljük, akkor ezek a síkok a felületet olyan görbékben metszik, melyek függőleges vetülete a vízszintes síkra azon $u, \rho v$ értékrendszerek összeségét adja meg, melyeknél a galvanométer ugyanannyi mikroampèret mutat. Ha ezekhez a különböző állandó kiütésekhez tartozó görbevonalakot megrajzoljuk, segélyükkel a felület épen úgy rétegvonalakkal ábrázolható, mint a hogy a térképeken a hegyeket szokás ábrázolni. Minden rétegvonal egy bizonyos kiütésnek megfelelő $u, \rho v$ értékrendszer ad meg, melyek mellett az illető Δi mikroampère megy át a galvanométeren. Képzeljük el, hogy ez a galvanométerkiütéseket ábrázoló felület meg van szerkesztve két különböző

barretterre. Két különböző barretternél általában véve két különböző felületet kapunk, ugyanazon állandó kiütések két különböző barretternél általában véve két különböző $u, \rho v$ értékrendszernek felelnek meg. Ha ez a két különböző görbesereg fel van tüntetve és pl. minden 2·5 tized mikroampèrenek megfelelő $u, \rho v$ görbék egy grafikumban bele vannak rajzolva, akkor ennek segélyével a Δi_1 és Δi_2 kiütésekhez tartozó sűrűséget és sebességet egyszerűen úgy határozzuk meg, hogy kikeressük azt a pontot, a hol az egyik rendszerhez tartozó $\Delta i_1 = \text{konst.}$ görbe metszi egymást, a metszéspont $u, \rho v$ koordinátái lesznek azon u hőmérséklet és ρv szorzat, melynél az egyik barretter Δi_1 , a másik barretter Δi_2 kitérést mutat, tehát azen $u, \rho v$ adatok, melyek mellett a barretterek a mérés alkalmával nyert kitéréseket adják (3a ábra).

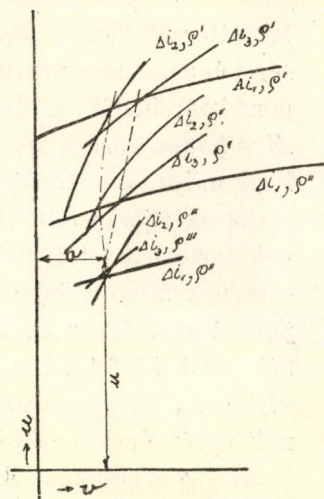
Így ezekből a mérésekből csak a temperaturákat és a ρv szorzatokat lehet meghatározni. De ezért a sebesség is elegendő pontossággal meghatározható, mert hiszen a sűrűség ingadozása csak 2% és hogy ha a sűrűséget egyszerűen állandónak vesszük, akkor is legföllebb 2% hibával kapjuk a levegő sebességét, ha a ρv szorzatot ismerjük. A sűrűség ingadozására azonban csak következtethetünk, a mennyiben az állapotváltozást adiabatikusnak vagy politropikusnak föltételezve, a temperatúraingadozásokból a feszültségingadozásokat számítás útján határozhatjuk meg.

8. §. Abban az esetben, ha nem tételezhetjük föl az adiabatikus állapotváltozást vagy valami más összefüggést a gáz állapotjelzői között, akkor három barrettert kell alkalmazni és akkor minden Δi értékhez tulajdonképen egy-egy görbesereg tartozik, t. i. akkor minden egyes ρ értékhez fog tartozni egy $\Delta i = \text{konst.}$ görbe. Minden egyes sűrűséghez lehet találni végtelen sok u hőmérsékletet és v sebességet, melynél a kiütés Δi , mert hiszen minden előre megadott sűrűség mellett egy magasabb temperaturánál és nagyobb sebességnél ugyanazon hűlési viszonyokat lehet elérni, mint egy alacsonyabb temperaturánál és megfelelő kisebb szorzatával. Így minden előre megadott

sűrűséghez lehet találni végtelen sok hőmérsékletet és sebességet, melyek mellett a galvanométer ugyanazon Δi kitérést mutatja. Midőn a ρ sűrűség, mint a jelen vizsgálat kereteiben, igen kevésbé ingadozik, ez csak annyit jelent, hogy néhány különböző ρ értékre meg kellene rajzolni a $\Delta i = \text{konst.}$ görbét, mondjuk minden Δi kiütéshez négy-öt görbét. Ebben az esetben nem lehet egyszerű metszéssel megállapítani a három



3a. ábra.



3b. ábra.

állapotjelzőt. A kitérés függ a ρ sűrűségtől, az u hőmérséklettől és a v sebességtől. Az eljárás abban áll, hogy először ki-keressük egy olyan ρ sűrűséghez tartozó

$$\Delta i_1 = \text{konst.} \quad \Delta i_2 = \text{konst.} \quad \Delta i_3 = \text{konst.}$$

görbékét, a mely ρ érték valószínűleg nagyobb, mint a mérés alkalmával a gáz sűrűsége volt. A három görbe általában véve nem metszi egymást egy ponton, hanem (3b ábra) az 1 és 2 barretterekhez tartozó görbék metszéspontjától a 3 barretterhez tartozó görbe, mondjuk, balra van. Ha most a gáznak a mérés alkalmával beálló sűrűségénél kisebb sűrűséghez tartozó $\Delta i = \text{konst.}$ görbékét vizsgáljuk meg, akkor ezeken a görbéken,

mint az ábra feltünteti a 3 görbe az 1 és 2 görbék metszéspontjától balra fog esni. Általában véve nagyobb nehézség nélkül meg lehet találni azt a sűrűséget, melyhez tartozó három görbe egy ponton metszi egymást. 1 és 2 barrettereknek megfelelő görbe metszéspontjait összekötő vonalat megszerkesztjük, azután ugyanezt tesszük az 1 és 3 barretterek görbéivel. Ez a két görbe egymással metsződik, a midőn a gáz három állapotjelzője és sebessége az, a mit a metszéspont definiál, a három barretter tényleg a Δi_1 , Δi_2 , Δi_3 kitéréseket veszi föl. A sebességet és a temperaturát közvetlen le lehet olvasni: ezek a metszéspont koordinátái; a sűrűséget pedig interpolációval a berajzolt $\Delta i = \text{konst.}$ görbék helyzetéből kell grafikus úton megállapítani, hogy milyen $\rho = \text{konst.}$ $\Delta i = \text{konst.}$ görbe haladhat át a ponton.

Ez az eljárás föltétlen megoldásra vezet. Itt szükségtelennek tartom azzal foglalkozni, hogy vajjon ennek a két görbeseregnek minő tulajdonságai vannak, meglegszem annak kijelentésével, hogy ezek a kísérleti úton megszerkesztett görbék, azok között a határok között, melyek között vizsgálataimat végeztem, tényleg olyan természetűek voltak, hogy a problémának egyértelmű megoldását adták.

Az ilyen grafikus eljárások használata a műszaki gyakorlatban igen el van terjedve és általában véve nagy kedveltségnek örvend. A gyakorlatban az ilyen grafikus eljárásoknak 2% pontosságot szoktak tulajdonítani, bár gondosan szerkesztett táblázatok felhasználásánál, mint pl. a STODOLA, MOLLIER gőztáblázatainál a pontosság jóval nagyobb lehet.

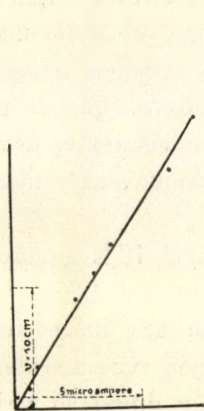
9. §. A mi a barrettermérés érzékenységét illeti, megjegyzem, hogy miként a mellékelt ábra (4a ábra) feltünteti, az

1000 Ω barretternél két milliméter $\frac{\rho}{\rho_0} v$ szorzat megfelel a PAUL-

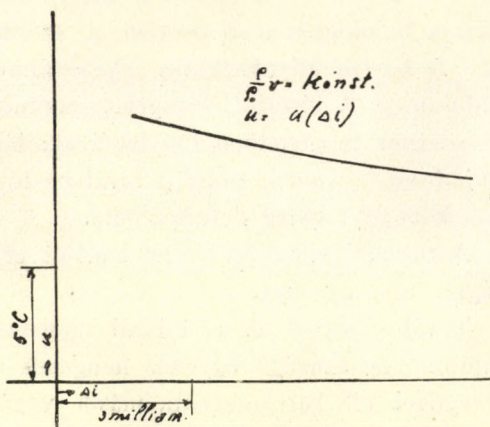
féle galvanométer egytized osztályzatnak, a mi még mindenestre leolvasható. Ugyanez az egytized osztályrész, mit a másik ábra (4b. ábra) feltüntet, állandó szorzatnál egy ezredfok temperaturának felel meg. Ez volna a legnagyobb érzékenység, a mit eddig el lehetett érni.

Mivel a PAUL-féle galvanométer érzékenysége 10^{-7} ampère, az EINTHOVEN galvanométert azonban feltétlenül oly érzékenynyé lehetne tenni ilyen mérések esetén is, a mint az EINTHOVEN-nek sikerült, talán egészen 10^{-12} -ig, úgy hogy ha szükség volna az érzékenység igen tetemes fokozására, még meg van a lehetőség.

10. §. Az említettek alapján a grafikum elkészítéséhez lehetőleg nagyszámú mérési adatra van szükségünk, melyek megadják, hogy a barretterrel kapcsolatos galvanométer kitérése különféle ismert hőmérsékletű, feszültségű és sebességű levegő-



4a. ábra.



4b. ábra.

ben mekkora. E célból egy csőben barrettert vagy barretereket kell elhelyezni, a csőben stacionárius levegőáramlást létesíteni és mérni a levegő állapotjelzőit és sebességét, továbbá a galvanométer kitérését. E mérési eljárás keresztülvitele elvben úgy történik, hogy egy gázométerből egy nyomást szabályozó készüléken keresztül, gummicső közvetítésével levegőt vezettem hosszú csővön keresztül, melyben a barretter volt elhelyezve. A csőben alkalmaztam a hőmérőt, a manométert és a sebességmérőt és a galvanométer kitérését megfigyeltem. A kísérleti berendezés tehát részben a levegő áramlásának létesítésére, másrészt pedig az áramlás alatt az állapotjelzők és sebességek, továbbá a galvanométerkitérés meghatározására szolgál.

A kísérletek további részleteit illetőleg utalok Lineáris gázmozgások című értekezésemre.¹

11. §. Ezzel a mérési eljárással már most mindenekelőtt megvizsgáltam azt a problémát, melylyel HUGONIOT foglalkozott. Egy hosszú, egyenes hengeres, kezdetben nyugvó gázzal telt cső egy keresztmetszetében gummihárttyát feszítettem ki; ha az ilyen erősen kifeszített gummihárttyát vékony tűvel megszúrjuk, szétpattanva 10^{-4} c. g. s. nagyságrendű idő alatt szabaddá teszi a keresztmetszetet. A hárttya egyik oldalán levő csőrész vége zárt és ebben a csődarabban kissé komprimált levegő van, a hárttya baloldalán levő csőrész a szabad levegővel kommunikál. A hárttya átllyukasztása pillanatában igen érdekes mozgás indul meg. A kísérleti vizsgálat eredménye, hogy a gázban az elméletnek megfelelően tényleg szakadások keletkeznek és tovaterjednek, továbbá, hogy a tovaterjedő hullámok alakja haladás közben tényleg deformálódik.

A kísérleti vizsgálat és az elmélet eredményei 10% pontossággal megegyeznek.

Továbbá ezzel az eljárással megvizsgáltam azt az esetet, midőn l hosszúságú egyenes hengeres cső egyik vége a szabad levegővel áll kapcsolatban, másik végét pedig dugattyú zárja el, mely dugattyút forgattyús mechanizmus segítségével mozgattunk. Ennek a problémának elméletével SOMMERFELD foglalkozott. Az elmélet és a kísérleti vizsgálat eredményeinek összehasonlítása arra vezet, hogy ezeknél a mozgásoknál a disszipáló erő hatása prædominál.

Továbbá végeztem méréseket gázmotoroknál, mely utóbbi mérésekre az eljárás igen használhatónak bizonyul.²

¹ L. G. p. 58—67.

² Magyar Mérnök- és Építészegylet Közlönye 1915, 5., 6., 7. sz.: Explóziós gépek keresőszerkezetének méretezésére vonatkozó vizsgálatok.

Irodalom.

STODOLA: Die Dampfturbinen. (1904, p. 50.)

MACH: Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien 1885, p. 637.

C. V. BOYS F. R. S.: On Electric spark photographs or photography of flying bullets & c by the light of the electric spark. Nature 1893, 47. k., p. 415 és 440.

STEFFENS: Über neue meteorologische Apparate.

WINKELMANN: Handbuch der Physik.

NEUSCHELER: Untersuchung stehender Schallschwingungen mit Hilfe des Widerstandsthermometers.

Dr. GERDIEN: Luftgeschwindigkeitsmesser der Siemens und Halske A-G. (Phys. Ztschr. 1913, p. 1161.)

Dr. Schrodtt István.

PHYSIKAI SZEMLE.

A fémek elektromos vezetőképességéről igen alacsony hőmérsékleteken. Mióta KAMERLINGH ONNES Leidenben igen alacsony hőmérsékletek előállítására alkalmas laboratóriumot rendezett be, azóta számos olyan dolgozat jutott onnan nyilvánosságra, melyek a testek különböző (termikus-, mágneses-, elektromos-, optikai-, radio-aktív-, stb.) tulajdonságainak igen alacsony hőmérsékleteken való viselkedéséről szólnak.

E dolgozatok között igen érdekesek és rendkívül értékesek azok, melyek a tiszta fémek elektromos vezetőképességére vonatkozó megfigyeléseket tartalmazzák.

Jelen referatumban nem ölelem fel e kérdésre vonatkozó eddigi összes eredményeket, hanem csakis arról szólok, miként tette KAMERLINGH szemléletessé egy egyszerű kísérlettel az úgynevezett «supravezetők» tényleges tulajdonságait.¹

KAMERLINGH már évekkel ezelőtt kimutatta azt, hogy van egy oly, az illető fémet jellemző (az abszolút nullpont közelében lévő) hőmérséklet, melynél a fémek elektromos ellenállása csökkenő hőmérséklet esetén *zérustól* észrevehetően alig különböző értékre lecsökken.

Hogy az ellenállás eme hirtelen változásának menetéről valamely képet nyújtsak, közlöm KAMERLINGHnek egy régebbi dolgozatából egy igen vékony Hg fonállal végzett megfigyeléseinek eredményeit. E Hg fonál ellenállása $4\cdot37^\circ$ abszolút hőfokon $0\cdot130$ ohm volt; a hőmérséklet csökkentésével az ellenállás eleinte lassan és *folytatosan* kisebbedett $4\cdot23^\circ$ -on még $0\cdot113$ ohm volt), egyszerre azonban $4\cdot19^\circ$ -on *hirtelen* 10^{-5} ohmnál kisebb értékre lecsökkent.

KAMERLINGH a fémeknek e hirtelen változás hőfokán aluli állapotát,

¹ H. KAMERLINGH ONNES. Compt. rend. 159. 34. 1914.

melyet tehát az jellemez, hogy a fémek elektromos ellenállása rendkívül csekély, azaz bennük az elektromosság rendkívül mozgékony, «*supra-vezető állapot*»-nak s a vezetőt «*supra-vezető*»-nek nevezték.

A supra-vezetők elektromos ellenállásának e rendkívül kicsiny értéke, maga után vonja azt, hogy mindazok az elektromos jelenségek és az azokat meghatározó mennyiségek nagyságrendje, melyek az ellenállástól függenek, az első pillanatra meglepő módon megváltoznak. Így pl. egy méter hosszú *Hg* fonálban alig $0.03 \cdot 10^{-6}$ volt potenciálkülönbséggel 1.7° -on oly áramot hozhatunk létre, melynek sűrűsége $1000 \frac{\text{ampère}}{\text{mm}^2}$.

Ugyancsak lényegesen megváltozik az áram zárását és nyitását kísérő indukciójelenség időtartama is.

Ismeretes, hogy e jelenség időtartamát a vezető időconstansa, azaz az az idő jellemzi, mely az áram nyitásának pillanatától eltelik addig, míg az áram intenzitása eredeti értékének «*e*»-d részére lecsökken, hol «*e*» a természetes logaritmikus alapszámát jelenti. De ez időconstans a vezető önindukció együtthatóján *L*-en kívül még ellenállásától *r*-től is függ, értéke e kettőnek viszonya $\frac{L}{r}$. Ha tehát a vezető ellenállása sok ezredére csökken, akkor az időconstans eredeti értékének sok ezer-szeresére megnövekszik. Ennek következménye az, hogy a míg az áram nyitását kísérő indukciós jelenség időtartama a rendes viszonyok között a másodpercznek csak csekély tört részét teszi ki, addig a fémek supra-vezető állapotában a jelenség órák hosszágig, sőt napokig is eltarthat.

Ezt a jelenséget használta fel KAMERLINGH a supra-vezetők igen kicsiny ellenállásának igazolására.

Kísérleteihez egy $\frac{1}{10}$ mm² keresztmetszetű ólomfonálból készült 1000 menetű 1 cm hosszú és 1 cm vastag *zárt* tekercset használt. E tekercs önindukció-együtthatója 10^7 C. G. S., ellenállása a szobahőmérsékleten 736 ohm volt. Mikor azonban a tekercs hőmérsékletét 1.8° -ra lehűtötte, ellenállása eredeti értékének 20 milliárdrésznél, $368 \cdot 10^{-10}$ ohm-nál kisebb értékre csökkent. Ha tehát a tekercsben indukált áramot keltünk, akkor az indukcióváltozás időtartamát jellemző időconstans értéke a szobahőmérsékleten $\frac{1}{3600}$ mp., a supra-vezető állapotban ellenben $\frac{10^8}{368}$ mp azaz *körülbelül* 80 óra.

KAMERLINGH e jelenség kísérleti kivitele céljából a tekercset egy erős elektromágnes sarkai közé helyezte el. Ezután a tekercset cseppfolyós héliummal lehűtötte; s mikor a tekercs hőmérséklete 1.8° -ig lehült, az

elektromágneest eltávolította. A tekercs belsejében elektromos áramot figyelt meg, mely egy mágnestit állandóan erősen kitérített. A tekercsben keringő áram intenzitását egy segédtekercscsel kompenzációs úton határozta meg s kb. 0.4—0.6 ampère-re becsülte. Egy óra lefolyása alatt az áram intenzitása alig tizedével változott meg. Mikor azonban a tekercset a héliumból kivette, a jelenség azonnal megszűnt.

E kísérlet a permanens mágnesekben levő Ampère-féle molekuláris áramoknak is szép demonstrációja.

Dr. Rybár István.

A Röntgen-sugarak intenzitása és keménysége.

H. KRÖNCKE: Ann. d. Phys. 43. p. 687. 1914. A dolgozat célja megállapítani a R.-sugarak intenzitásának és keménységének függését a R.-csövet tápláló áram intenzitásától és feszültségétől. A R.-csövek táplálására magas feszültségű egyenáramot használt, a melyet úgy állít elő, hogy egy váltakozó áramú generator közel 80 Voltos áramát induktoriummal magas feszültségűvé transzformálja és az induktor sarkait a dynamo tengelyén forgó surlókkal úgy kapcsolja egy nagy kapacitású kondenzátor sarkaihoz, hogy ez mindig abban a pillanatban lesz megtöltve, a mikor a szekundärfeszültség maximális pozitív értékét elérte. A kondenzátor két fegyverzetéről vette le a R.-cső járatására használt áramot, a mely kisebb feszültségeknél egyenletes intenzitású egyenáram, nagyobb feszültségek esetében váltakozó intenzitású, de egyirányú áram volt, a mőről közbeiktatott oszcillograffal győződött meg. Az áramkörbe iktatott magas feszültségű Voltmeterrel — mérési intervallum egészen 200,000 Voltig — és milliampèreméterrel mérte a R.-csövön átmenő áram kapocsfeszültségét illetőleg intenzitását, a melyeket megfelelő ellenállásokkal a mérésekhez szükséges intervallumokban egyenként is változtathatott. Az ilyen módon végzett mérések adják a R.-cső karakterisztikumát, a mely szerint kevésbé kemény csöveknél a csövön átmenő áram feszültsége és intenzitása között közel lineáris összefüggés van oly módon, hogy magasabb feszültségnél nagyobb áram megy át a csövön.

Nagyon kemény csöveknél a feszültség közel független az átmenő áram erősségétől. A cső megindítására szükséges feszültség általában minden csőnél nagyobb, mint a már működésben levő cső táplálására szükséges minimális feszültség. Ezt a feszültséget gyújtási-feszültségnek (Zündgipfel) nevezik.

A R.-sugarak intenzitásán értjük a R.-sugárzás teljes energia-

mennyiségét, míg a keménységen értjük a sugaraknak különböző anyagokon való áthatoló képességét. Azon sugarakat mondjuk keményebbeknek, a melyek ugyanazon a testen áthaladva, kisebb mértékben abszorbeálódnak. A keménység mérése úgy történik, hogy mérjük az abszorbeáló testre eső sugárzás J_0 intenzitását és a testen áthaladt sugarak J intenzitását. Ekkor a fényabszorpczio ismeretes $J = J_0 e^{-dx}$ egyenlete alapján számítjuk az illető sugárzás x abszorpczio-koefficiensét, ha d jelenti az egyszersmindenkorra alapanyagul választott abszorbeáló anyag rétegvastagságát. Abszorbeáló anyagul alumíniumlemezeket használnak, mivel alumíniumnál a méréseket befolyásoló szekundár-sugárzás igen kis mértékben lép fel. Látjuk tehát, hogy a keménység mérése vissza van vezetve az intenzitás mérésére, a mi a sugarak ionizáló hatása alapján történik. Bolométerrel végzett abszolút mérések alapján megállapított, hogy a R.-sugarak hatására létrejövő telítési áram pontosan arányos a sugarak intenzitásával.¹ Összehasonlító mérésekre tehát czélszerűbb a könnyebben kivihető ionizáló képesség mérése.

Szerző mérte síklapú kondenzátor között létrejövő telítési áram intenzitását egy kompenzáló áram segítségével. A kompenzáló áram beállítására érzékeny elektrometer szolgált. A telítési áram erőssége ekkor egyenlő a kompenzált áram erősségével, a mit OHM törvénye alapján számított. A mérések eredménye az, hogy állandónak tartva a R.-csövet tápláló áram feszültségét, a R.-sugarak intenzitása direkte arányos a csövet tápláló áram erősségével. Viszont állandónak tartva a csövet tápláló áramot, a sugarak intenzitása arányos az áram kapcsolófeszültségének a négyzetével. A két törvényt egy formulába foglalva a következőképen fejezhetjük ki, ha S jelenti a R.-sugárzás erősségét

$$S = C \cdot J \cdot (V^2 V_0^2)$$

hol C és V_0 a csövet jellemző állandók és J a csövet tápláló áram intenzitása.

A R.-sugarak keménységének mérésére szerző három különböző vastagságú alumíniumlemez használt, a melyeken mérte a R.-sugarak abszorpcziokoefficiensét. A különböző vastagságú lemezekre különböző abszorpcziokoefficienseket kapott jelölül annak, hogy a sugarak nem homogének. A vizsgálatok azt mutatják, — miként azt a sugarak kelet-

¹ E. Angerer. Ann. d. Phys. 21. p. 87. 1906.

kezésére vonatkozó elméleti megfontolások is követelik —, hogy a sugarak keménysége független a R.-csövet tápláló áram intenzitásától és csupán csak ezen áram kapcsolófeszültségétől függ. Viszont a különböző feszültségek mellett mért abszorpciokoefficiensek szerint a sugarak inhomogénitása független a feszültségtől.

Az egyes R.-csövek között fellépő individuális különbségek magyarázatát az antikatod sugárzókéességében és cső falának vastagságában keresi, e végett leméri ugyanazon antikatod, áram és feszültség mellett különböző csövek sugárzásának intenzitását és a csövek falvastagságát és azt találja, hogy a falvastagság lényegesen befolyásolja az egyes csövek R.-sugárzását és pedig a sugárzás intenzitása a falvastagsággal rohamosan csökken. Ennek természetes következménye, hogy az egyes csövek annál keményebbek, minél vastagabb a cső fala, mert annál több gyenge sugár nyelődik el az antikatodról kibocsátott sugarak közül.

Szerző vizsgálja még a R.-sugárzás hatását a fotografiai lemezre, mivel ez is használatos methodus a R.-sugarak intenzitásának és keménységének a meghatározására. Természetesen a sugarak hatása függ a lemezek minőségétől is. SCHLEUSSNER-lemezeket alkalmazva a kísérletek eredménye az, hogy a R.-sugarak hatása — mérve a lemezek feketedésén — arányos a sugarak intenzitásával, a mi a BUNSEN-ROSCO-féle törvény igazolása, a mely szerint egyenlő energia mennyiségeknek egyenlő fotokémiai hatások felelnek meg. E szerint a sugarak fotografiai hatása az intenzitások összehasonlítására alkalmas, míg a keménység fokára az ionizációval mért értékekhez képest 50%-al eltérő értékeket szolgáltatnak, a minek oka az érzékeny rétegben, az üvegben és az abszorbeáló anyagban fellépő másodlagos sugárzás.

A kísérleteknek jelentőségük van a R.-sugaraknak az orvosi praxisban való adagolására.

Gyulai Zoltán.

A radium B lágy γ sugarainak hullámhossza. E. RUTHERFORD és E. N. DA. C. ANDRADE. Phil. Mag. 27. k. 161. sz.

A Röntgen-sugarak interferenciájának felfedezése után közelfekvő gondolat volt, a hasonló természetű γ -sugaraknál fellépő interferenciajelenség után kutatni. Ennél a feladatnál két nehézséggel állunk szembe, először is sokkal csekélyebb a γ -sugarak fotografiai hatása az X-sugarakénál, másodszer pedig ki kell küszöbölni az őket kísérő γ -sugárzást és az általuk keltett szecunder β -sugárzást.

Először N. SHAW¹ próbálkozott meg ennek a feladatnak a megoldásával, γ -sugárforrás gyanánt 15 mg. radiumbromidot használt, a primér β -sugarakat egy 2 mm vastag ólomlemezzel fogta fel, a szecundér β -sugarakat pedig elektromágnes segítségével hajlította el. Az interferenciajelenséget csillámlemezzel állította elő, a mely lemez BRAGG eljárása szerint közel, a sugarak irányában volt elhelyezve; az interferenciaképet fotografiai lemezen állította elő. Mivel a rövid hullámhosszú sugarak spektroszkopiája akkor még nem volt úgy kifejlődve mint most, csak arra az eredményre jutott, hogy a γ -sugarak hullámhossza valószínűleg a kemény Röntgen-sugarakénak felel meg, mert ezekkel mutat hasonló interferencia jelenségeket.

A rövid hullámhosszú spektroszkópia ma már kifejlett módszerével hozzá lehetett fogni azon kérdés tisztázásához, hogy vajon egy bizonyos γ -sugárzás homogén-e és ha nem, milyen hullámhosszú vagy másképen milyen áthatolóképessegű komponensekből van összetéve. RUTHERFORD, a ki különböző radioaktív anyag γ -sugárzásával behatóan foglalkozott, ahhoz a feltevéshez jutott, hogy egy anyag által kibocsátott γ -sugárzás úgy tekinthető, mint β -sugárzása által keltett «karakterisztikus» sugárzás. Ez a karakterisztikus sugárzás azután megfelelne a BARKLA által megfigyelt karakterisztikus sugárzás egy vagy több csoportjának. Abszorpciós kísérletekkel RUTHERFORD megállapította, hogy a radioaktív átalakulási sorozatok B elemei a γ -sugaraknak három nagyon különbözően penetrans csoportját bocsátják ki, míg C elemek egy ilyen γ -sugar csoportot emittálnak. A γ -sugarak tehát szerinte három csoportba sorolhatók, úgy mint a lágy sugárzás, a mi megfelelne a BARKLA-féle « L » karakterisztikus sugárzásnak, egy nagyon áthatoló typus, a mi megfelelne a BARKLA-féle « K » typusnak és végül egy, a melynek áthatoló képessége a két előbbi között van és melynek megfelelő karakterisztikus X-sugárzást még nem figyeltek meg.

Ezeknek a kérdéseknek tanulmányozására használja fel RUTHERFORD a MOSELEY² által a karakterisztikus Röntgen-sugárzás spektrumának megállapításánál használt módszert. MOSELEY módszere főbb vonásokban a következő: a sugárzó forrás előtt egy keskeny rés van alkalmazva, a melyen keresztül a sugarak a rács szerepét játszó, egy spektrometer asztalkájára szerelt kristályra esnek; ha a kristály kellő szög alatt van

¹ N. Shaw Phil. Mag. 26. k. 151. sz.

² H. G. Moseley, Phil. Mag. Dec. 1913. Apr. 1914.

elhelyezve (úgy hogy $n\lambda = 2d \cos \theta$, a hol n egész szám, d a rács-állandó, θ a kristálylapja és a beeső sugár által alkotott szög), úgy a sugarak reflektálódnak és ha a közönséges reflexió törvényének megfelelő helyzetben egy fotografiai lemez van elhelyezve, úgy ott a résnek képét adják, ha még teljesítve van az a feltétel is, hogy a résnek és a fotografiai lemeznek a távolsága a kristálytól egyenlő. Ha a kristályt lassan forgatjuk, az egész spektrumot megkaphatjuk. MOSELEY ilyen módon meghatározta a különböző anyagok karakterisztikus Röntgen-spektrumát és nagyon szép egy és ugyanazon törvényszerűségnek elegendő vonalas spektrumot kapott. R. feltevése értelmében, a γ -sugaraknál is ilyen diszkrét vonalakkal álló spektrumot várt.

γ -sugárforrás 100 millicurie radiumemanáció volt, a primér és szekundér β -sugarakat 2500 gauss erősségű térrel térítette el, a direkt β -sugaraktól pedig ólomtömbök segítségével védte a lemezt. A kristály forgatása úgy történt, hogy egy nagy víztartó edényből, melyben egy uszó volt elhelyezve, kapilláris csövön keresztül folyt ki a víz, az uszó süllyedése könyökszerkezet segítségével forgatta a spektrométer asztalkáját, így elérhette, hogy az asztalka egyenletes forgással 4–8 óra alatt fordult 1° -kal. Kristály gyanánt kősót használt, melyre nézve az atom-síkok egymástól való távolsága $d = 2.814 \cdot 10^{-8}$, azután bariumsulfatot (sulypát), melyre nézve előbb meghatározta d -t, úgy hogy egy bizonyos Röntgenspektrumot vett fel a kősó és a bariumszulfat kristálylával. A két kristálylával nyert eredmény teljesen megegyezik, a mi azt mutatja, hogy a nyert vonalak tényleg diffrakciós vonalak és nem származnak a kristály szabálytalanságaitól.

RUTHERFORD arra az eredményre jut, hogy a radioaktív testek által kibocsátott γ -sugárzás teljesen meghatározott hullámhosszú sugártypusokból van összetéve, azaz vonalas spektrumot mutat, a mely vonalas spektrum hasonló szerkezetű, mint a karakterisztikus Röntgen-sugarak spektruma. RUTHERFORD és ANDRADE csak a radium B -nek megfelelő lágy vonalakat vizsgálják, mert ezek adják a legintenzívebb vonalakat és hullámhosszúk is megfelel körülbelül a karakterisztikus Röntgen-sugarak hullámhosszáinak.

SODDY kimutatta, hogy radium B , aktinium B , thorium B és radium D isotopok (azaz kémiai módszerekkel el nem választathatók) az ólommal, a mi az atomszerkezet elméletének mai állása szerint egyértelmű azzal a kijelentéssel, hogy magjoknak pozitív töltései egyenlők. Moseley viszont arra a törvényszerűségre jutott, hogy valamely elem karakterisztikus

spektruma csakis a mag töltésétől függ és ennek a segítségével a főbb vonalak hullámhossza ki is számítható. RUTHERFORD felfogása azt követeli tehát, hogy a radium B γ -sugárspektruma teljesen azonos legyen az ólom karakterisztikus X-sugár spektrumával. Moseley adatai szerint R. kiszámította az ólom karakterisztikus X-sugár spektruma főbb vonalainak hullámhosszát és tényleg azt találta, hogy ezek teljesen megfelelnek a radium B γ -sugár spektruma főbb vonalainak. De tovább ment és ugyanazzal a berendezéssel, a mivel a γ -sugár spektrumot meghatározta, fel vette az ólom karakterisztikus X-sugár spektrumát és a kísérleti értéket a számítottal teljesen egyezőnek találta. Az ólom karakterisztikus Röntgen-sugárzást β -sugarak segítségével állította elő, RICHARDSON ugyanis kimutatta, hogy ha valamely testet radium B v C β -sugárzása éri úgy az, az « L » szeriának megfelelő karakterisztikus Röntgen-sugárzást bocsát ki.

RUTHERFORD értekezése tehát nem csak abban a tekintetben értékes, hogy a rövid hullámhosszra kidolgozott mérési eljárást a γ -sugarakra alkalmazza, de abból a szempontból is, hogy eredményei mai felfogásunkat az atomszerkezetről, Moseley eredményeit és saját feltevését a γ -sugárzásra vonatkozólag, nagyban támogatják, sőt lehetne mondani igazolják.

Küszler Elly.

A hidrogencsősugarak reflexiója. E. WAGNER. ANN. d. Phys. 41. 209. 1913.

A csősugarak reflexióját eddig két uton vizsgálták; az egyik módszer, mely THOMSON és FRUCHTBAUERTól származik, abban áll, hogy a reflektorral szemben levő felfogónak pozitív töltését határozzák meg. A másik STARKnak azon megfigyelésén alapszik, hogy a longitudinális irányban való megfigyeléskor a normális (azaz a lila felé eltolódott, s a közeledő részecskéknél megfelelő) DOPPLER effektuson kívül még egy gyöngébb, a vörös felé eltolódott vonal jelentkezik. Ezt a második vonalat az üveg faláról visszavert, azaz távolodó csősugaraknak tulajdonította és ennek alapján határozta meg az üveg reflektálóképességét.

WILSON és WAGNER felismerték, hogy ilyen berendezés mellett a vörös felől jelentkező mozgó intenzitás legnagyobb részét nem a kérdéses üvegfalról reflektált, hanem az úgynevezett retrograd (azaz a kathodnak a kisülési tér felé fordított falából kiinduló pozitív sugarak) és a kathod faláról reflektált fénysugarak okozzák. Hogy ezeknek a sugaraknak a

hatását kikerüljék, mindketten úgy járnak el, hogy nem a csőugarak haladási irányában, hanem ezzel egy bizonyos szöget bezáró irányban vizsgálják a spektrumot, ezáltal és a falak és a kathod falának a megfigyelő tér felé eső részének bekormozása által elérik, hogy minden idegen fény ki van zárva a megfigyelésből. Fémfelületek esetében berendezéseik némileg különböznek, a mennyiben WILSON a reflektáló fémfelület előlső lapját vizsgálja, WAGNER pedig, — hogy minden optikai reflexiót kikerüljön — keskeny 1 mm széles, 2 cm hosszú nyíláson keresztül figyeli meg a gondosan bekormozott reflektor hátsó lapja felől a spektrumot.

WAGNER dolgozata különösen abban az irányban nyújt újat, hogy berendezésével két különböző reflektáló felület visszaverőképességét közvetlenül összehasonlíttja, úgy hogy a köralakú reflektáló lapnak felső és alsó része különböző anyagból van. Így két spektrumot kap egymás fölött, a melyeknek egyike a felső reflektáló anyagnak megfelelő mozgó intenzitást, a másik pedig az alsó anyagnak megfelelő mozgó intenzitást mutatja. Ez a berendezés azért nagyon célszerű, mert a két spektrum teljesen azonos körülmények között keletkezik.

A használt spektrograf egy STEINHEIL-féle három prizmás eszköz, az egyes vonalak intenzitáseloszlásának kimérését pedig a KOCH-féle regisztráló mikrofotometerrel végzi. A vizsgált anyagok: üveg, aluminium, arany. Arra az eredményre jut, hogy üveg és aluminium reflektáló képessége praktikusán ugyanaz, aranyé pedig valamivel nagyobb. Dolgozata végén megemlíti, hogy a kathod porladása folytán a reflektáló felületek mindegyikén egy vékony aluminiumréteg képződött, nem tartja azonban valószínűnek, hogy ez okozza a közelítőleg egyenlő reflexiót, mert ha a kathodot és a reflektáló felületet egymással összeköti, úgy a reflexióképesség nem változik, pedig aluminiumréteg nem vehető észre a reflektoron.

Vizsgálat tárgyává teszi még azt a kérdést, hogy a reflexió szabályos-e vagy diffúz és arra az eredményre jut, hogy a visszaverődés diffúz.

Küssler Elly.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

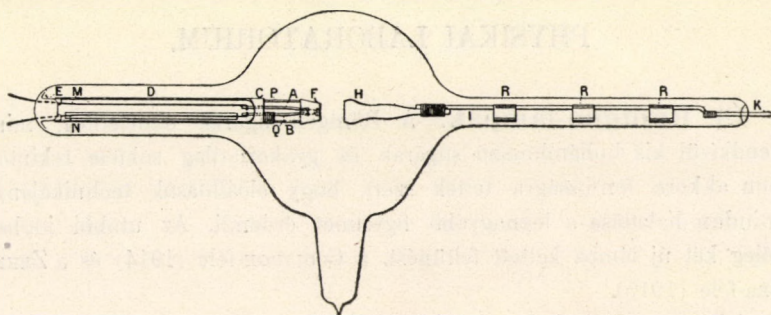
Új Röntgen-lámpák. A Röntgen-sugarak elméletileg, mint rendkívül kis hullámhosszú sugarak és gyakorlatilag sokféle tekintetben akkora fontosságra tettek szert, hogy előállításuk technikájának minden haladása a legnagyobb figyelmet érdemli. Az utóbbi időben főleg két új lámpa keltett feltűnést. a COOLIDGE-féle (1914) és a ZEHN-DEK-féle (1915).

A Röntgen-lámpából, mint ismeretes, különböző hullámhosszú és evvel együtt különböző keménységű sugarak lépnek ki. A kis hullámhosszú sugarak kemények, a nagyobb hullámhosszúak lágyak. Az X-sugarak színképe a cső szerkezetétől, a ritkítás fokától, az áram erősségétől és az antikatod anyagától függ. Ha a színképben a kis hullámhossz túlnyomó, akkor a lámpát keménynek nevezzük. Minél kisebb a levegő nyomása, annál keményebb a lámpa, tehát a keménységet a ritkítással szabályozni lehet. De működés közben a keménység változik. Ha a lámpát túlságosan megterheljük, az elektrodok felmelegszenek, a bennük elnyelt levegő a lámpába jut. Ezt azonban kerülni szoktuk, hogy a lámpa hamar tönkre ne menjen. Legtöbbször az elektrodok anyaga szétporlik, ez a fémpor elnyeli a levegőt, tehát a lámpa keményebb lesz. A megterhelés fokozását más körülmény is korlátozza. A homorú katodból kiinduló sugaraknak egy pontban, a gyújtópontban kell az antikatodot érniök, mert különben nem kapunk éles képet. Az antikatodnak ez a helye tehát nagy igénybevételnél könnyen megolvad. Ennek elkerülése végett az antikatodot hűteni is szokás, de az áramerősséget így se sokkal növelhetjük.

Ezeket a hátrányokat akarja a COOLIDGE-féle cső, az északamerikai General Electric Co. gyártmánya, megszüntetni.¹ A keménységet tág

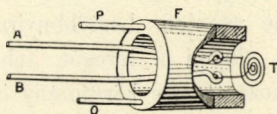
¹ Gen. El. Review, 17., 1914, 104. l.

határok között lehet változtatni, a megterhelést pedig növelhetjük. Ed-
dig a keménységet fizikai vizsgálatokban úgy változtatták, hogy a csövet
légszivattyúval kötötték össze. A csőben, mint mindenütt, mindig van
néhány elektron. Ezek az elektrodok között keltett elektromos térben
az anodhoz vándorolnak, közben pedig ütközés folytán a levegőt ioni-
zálják. Ezen a levegőn az áram áthaladhat. COOLIDGE-lámpájában a ki-



1. ábra.

sülés nem ilyen önállóan keletkezik. A levegő annyira meg van benne
ritkítva, a mennyire csak lehetséges. A kisüléshez szükséges ionok izzó
fémfelületből erednek. A katódot csavarvonalon görbített wolfrámdrót,
(*T*, 2. ábra) melegíti, átmérője 0.216 mm, hossza 33.4 mm, 5.5 csa-
varmenetből áll, a csavar külső átmérője 3.5 mm. Ezt a drótot külön
3—5 ampére erősségű segédáram izzásig hevíti, melyet akkumulátorok szol-
gáltatnak közbeiktatott ellenállással. (3. ábra.) Az izzó fémfelületet, mint

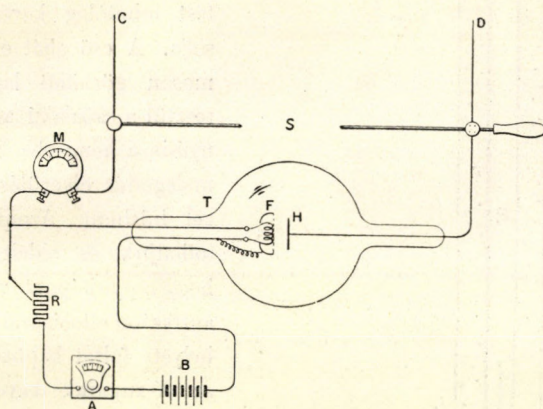


2. ábra.

tudjuk, elektronok hagyják el. Maga a katód molibdénből készült henger,
melyet két ugyancsak molibdénrúd (*P* és *Q*, 1. és 2. ábra) tart. E rudak
egyike vezető összeköttetésben van a melegítő spirális áramvezető két
rúdjaival (*A* és *B*). A katóddal szemben álló antikatód (*H*, 1. ábra)
10 g-nyi tömör wolfrám és egyúttal anód is. Az áram hozzávezetését az
I molibdéndrót végzi, a melyre több helyen vastagabb fémtömegek (*R*)
vannak ráforrasztva hűtés céljából. A kiszivattyúzásnál a fémekben

lenyelt gázokat gondosan el kell távolítani. Ezért a csövet ritkítás közben hevítik és erős áramot bocsátanak át rajta. A COOLIDGE-féle cső nagy megterhelést bír el, keménységét a feszültség változtatásával könnyen lehet módosítani.

A cső szerkezete, mint látjuk, egészen eltérő az eddigiektől, de alapgondolata LILIENTFELD-től és ROSENTHAL-tól ered,¹ a kik a levegő vezetőképességét a csőben a sűrűségtől függetlenül akarták előállítani. Ezért nehezen olvadó, nehezen szublimáló és izzásig felhevített fémből készült katod és közönséges anod között alacsony feszültséggel kisülést keltettek. Az izzó katodot WEHNELT módjára alkalikus földfémmeel von-



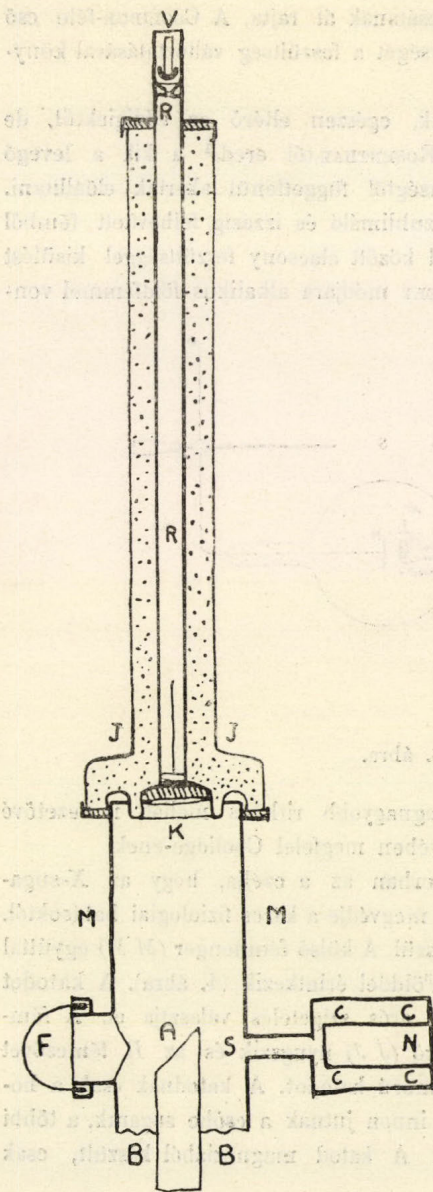
3. ábra.

ták be. Ilyenkor a levegő a legnagyobb ritkítás mellett is vezetővé lesz. Ez a szerkezet tehát alapelvében megfelel Coolidge-ének.

A ZEHNDER-féle csőnek² elsősorban az a célja, hogy az X-sugarakkal huzamosabban dolgozókat megvédje a káros fiziológiai hatásoktól. Ezért a cső üveg helyett fémből készül. A külső fémhenger (M M) egyúttal anod és a kezelők védelmére a Földdel érintkezik (4. ábra). A katodot a fémburoktól és az antikatódtól erős szigetelés választja el. A fémhengeren vastag falu porcelláncső (J J) nyugszik és az R fémcsövet veszi körül. Ez a cső tartja a homorú katodot. A katodnak csak a homorú felülete szabad, tehát csak innen jutnak a csőbe sugarak, a többi rész a szigetelőbe van ágyazva. A katod magnéziából készült, csak

¹ Fortschr. auf dem Geb. der Röntgenstr., XVIII, 256. 1.

² E. T. Z., 1915, 5. füzet.



4. ábra.

homorú felülete van nehezen olvadó wolfrámmal bevonva. Külön áramforrással melegíteni lehet, tehát a COOLIDGE-féle cső előnyét Zehnder is értékesíti. Az érintkezések helyét kaucsukgyűrű vagy könnyen olvadó ragasztószer zárja el. Működés közben ezeket a helyeket hűtik, hogy a gőzök nyomása a ritkítást lehetőleg kevésbé befolyásolja. A cső alját elzáró, hullámosan görbített lapon (*B*) keresztül a csőalakú antikatód (*A*) nyúlik a hengerbe. Nagyobb felmelegedés elkerülése végett vízzel hűthető. Azonkívül fel-alá tolhatjuk és oldalt dönthetjük, hogy a gyújtópont változzék. Az antikatód eltolásával a gyújtópont helyett foltot kaphatunk. Ekkor az *X*-sugarak kevésbé összetartók, de egyes esetekben, főleg az orvosi alkalmazásokban, éppen ez a fontos. Az antikatódnak a katóddal szemben eső felülete nagy atomsúlyú fémmel van bevonva. Az *X*-sugarak a lámpát csakis a fémhengernek vékony alumínium- vagy üveglappal bevont ablakán (*F*) át hagyhatják el. A szemben levő oldalon a hengercső (*S*) segítségével szén (*C*) tartalmazó edénnyel (*N*) közlekedik. Mikor a lámpa kifáradt, az (*N*) edénybe helyezett elektromos fűtővel a szén melegíthetjük és így a lámpába

levegő kerül. Az ablak elé fémszűrőt vagy különböző nyílású diafragmát lehet helyezni. Vastagabb fémlappal egészen elzárhatjuk. Ha a levegőt már kellően kiszivattyúztuk, akkor a csövet elektromágneses szeleppel (V) elzárhatjuk.

Ha a porcelláncső elég erős, a lámpát igen nagy feszültséggel meg lehet terhelni. Evvel a sugarak keménységét fokozhatjuk. Az eddigi kísérletekben ZEHNDER ugyanakkora áramenergiával az eddiginél tízszer erősebb sugárzást tudott előállítani, de reméli, hogy a méretek alkalmas megválasztásával a sugarak erősségét ezerszeresre fokozhatja. A sugarak oly kemények, hogy az orvosi kezelésben a radium és mezothorium γ -sugarait helyettesíthetik. A nagy erősség és keménység folytán képek felvételénél 0.2 másodpercig tartó sugárzás már elegendő.

Túlságos ritkításnál kívül üt át a szikra, de a csőnek ez sem árt. Az elromlott részeket könnyen lehet pótolni. Nem hagyhatom említés nélkül, hogy ZEHNDER találmányát nem szabadalmaztatta, mert azt akarja, hogy lámpája minél szélesebb körben elterjedjen.

Mende Jenő.

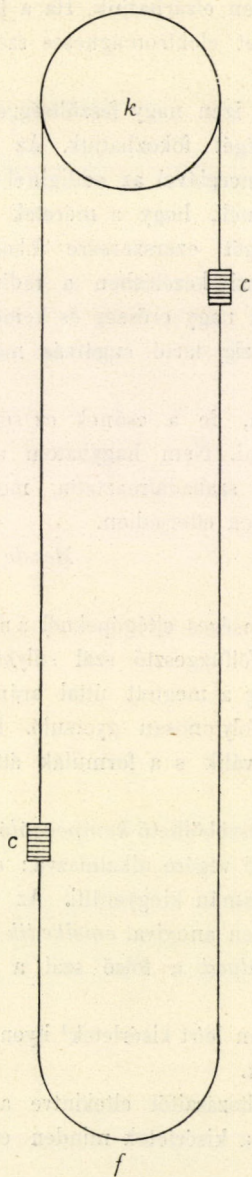
Javítások az ejtőgépen. A közönséges ejtőgépeknél a mozgás nem lehet egyenletesen gyorsuló, mert a fölfüggesztő szál súlykülönbsége a két oldalon változó. Ez a különbség a megtett úttal arányosan nő s így adott túlsúly mellett a mozgás folytonosan gyorsuló. Ezáltal azonban a mozgás egyenlete komplikálttá válik s a formulák áttekinthetősége elvész.

Az említett hátrány igen egyszerűen kiküszöbölhető *kompenzáló fonál* alkalmazásával, mely az állandó súlyok alsó végére alkalmazva: a kétoldali súlykülönbséget a mozgás egész folyamán kiegyenlíti. Az 1. ábrából világos, hogy a kompenzáló szál éppen annyival *emelkedik fölfelé* az egyik oldalon, mint *a mennyivel súlyosabb* a felső szál a másik oldalon.

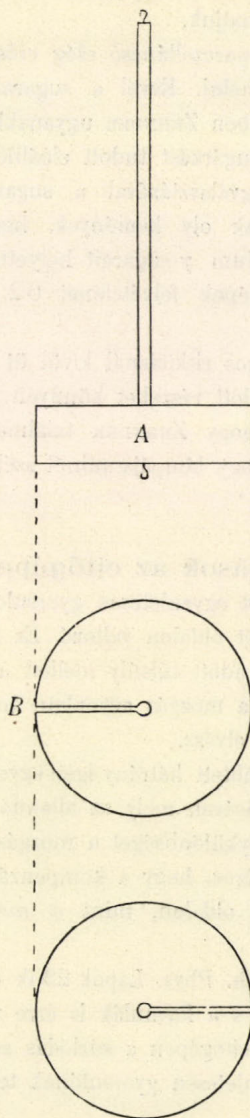
A Math. Phys. Lapok 22-ik évfolyamában leírt kísérletek¹ ilyen gépen történtek s a formulák is erre vonatkoznak.

Ilyen ejtőgépen a súrlódás esetleges változásaitól eltekintve a mozgás egyenletesen gyorsulónak tekinthető s a kísérletek minden előzetes

¹ Bodócs: Az energia megmaradás elve és az ejtőgép mozgástüneményei. 1913. 220. lap.



1. ábra.



2. ábra.

számítás nélkül végezhetők, a mi a kísérletezés munkáját lényegesen megkönnyíti s a *kísérletek sikerét biztosítja*. Minthogy azonban a közönséges eljárásnál az egyik oldalra tett túlsúly növelésekor az *összes mozgótömeg is növekszik*, ennél fogva a formulákba $\frac{M}{M+r}$ alakban *korrekciós tag* lép be, hol r a túlsúly. M a gép összes mozgó tömegeit jelenti.

Ennek kikerülése és a formulák eredeti egyszerűségének biztosítása céljából azóta a kompenzált ejtőgépen lényeges javítás történt, a meny nyiben a C súlyok alakjának alkalmas megválasztásával elértük azt, hogy a túlsúlyt *nem újabb súlyok felrakásával, hanem a kétoldali súlykülönbség változtatásával* lehessen variálni, miáltal az *összes mozgótömeg állandósága* biztosítva van.¹

Ilyen ejtőgépet készít utasításaim nyomán MILAKOVSZKY LÁSZLÓ tagtársunk esztergomi tanszergyára. A javított modellnél a fonál végein lógó tömegek 5, 10 és 50 grammos, lapos fémkorongokból vannak összerakva s ezenkívül 10 drb félgrammos korong van a készülékhez mellékelve. A legalsó korong közepébe van csavarva (2. ábra A) az egész súlysorozatot tartó rudacska s a korong súlya úgy van kiegyenlítve, hogy e tartórúddal *együtt* nyom 10 vagy 50 grammot. Az egyes korongok közepén át vannak fúrva s a fonál vastagságának megfelelő, de a tartórúd átmérőjénél keskenyebb radialis bemetszéssel ellátva (2. ábra B), mely elrendezés a súlysorozat centrikus állását föltétlenül biztosítja. Ezenkívül (2. ábra, B és C) a sorozat összeállításánál az egyes korongok radialis bemetszését fölváltva, ellenkező oldal felé irányítjuk, hogy a súlypont lehetőleg beleessék a tartórúd, illetve a fölfüggesztő fonál tengelyébe.

Egy kísérleti összeállítás lehet pl. a következő:

A jobb oldalon levő 10×10 grammot a baloldalon ellensúlyozza $9 \times 10 + 5 + 10 \times 0.5$ gr. Ha most a baloldaltól félgrammos korongot teszünk át a másik oldalra, akkor $100 + 0.5$, illetve $100 - 0.5$ gr. terhelés lesz a fonál végein, vagyis 1 gr. súlykülönbség fogja létesíteni a gyorsuló mozgást. Két-három félgrammos lapocskát téve át a másik oldalra, a súlykülönbség 2, illetve 3 gr. lesz, miközben az összes mozgótömeg ugyanaz marad. A kísérletek tanúsága szerint a súrlódás hatásától eltekintve a gyorsulás is 1:2:3 arányban fog növekedni.

¹ V. ö. Schuller: Az esőgépkísérletekről, 224. lap, utolsó bekezdés.

A súlykülönbséget természetesen nem szabad bizonyos határon túl hajtani, mert esetleg a fonál csuszamlása fenyeget, ez pedig a kísérletek sikerét illuzóriussá teszi. Továbbá nehezebbé válik az idő lemérése s így a gyorsulás értéke nem számítható ki pontosan.

Ezenkívül esetleges félreértéseknek elejét veendő, utalni kell arra, hogy a *gyorsulás nem növelhető* ily módon *határtalanul*. Ha ugyanis az összes súlyokat át is lehetne rakni a másik oldalra (pl. fogaskereket és fonál helyett lánczot használva), a gyorsulás még mindig kisebb a szabadesésnél, mert a mozgást létesítő túlsúly a fonál és a *kerék* tömegét is kénytelen gyorsuló forgásba hozni s így a nehézségerő munkájának csak egy része fordítatik a haladó mozgás gyorsítására. Ha tehát a korongok összes tömege m , a fonál tömege f és a kerék *redukált* tömege k , akkor az elérhető legnagyobb gyorsulás elhanyagolható surlódás esetén

$$r = \frac{m}{m+f+k} g$$

Ez csak akkor közelítené meg a szabadesés g gyorsulását, ha a fonál és a kerék együttes tömege *elhanyagolható* lenne a korongok tömegéhez képest.

Végül fölemlítjük a kompenzált ejtőgépnél azt a nagy előnyét, hogy a felfüggesztésnél nem vagyunk *vékony* fonalak használatához kötve, melyek tudvalevőleg kellemetlen torzió lengésekre adnak alkalmat. Ilyenformán sikerült speciális anyagból készült oly *szövött* szálát alkalmazni, mely nagy terheléseket elbír, e mellett rendkívül hajlékony és torziós igénybevétellel szemben oly nagy ellenállást fejt ki, hogy a felfüggesztett súlyok esetleges torziós lengéseit megszünteti.

Az ismertetett ejtőgéppel a szokásos előadási kísérletek minden nehézség nélkül végezhetők s különleges «fogások» alkalmazására nincsen szükség.

Bodócs István.

IRODALOM.

Dr. Batta István : A középiskolai fizikatanítás néhány kérdéséről. Békés, 1914. A szerző célja a középiskolai fizikatanítás történetéből és felismert hiányából kiindulva, a jövő középiskola fizikatanításának alapvető kérdéseit — a külföldi viszonyok tekintetbevételével — megvilágítani.

E célra rövid áttekintést nyújt e tudomány tanításának történetileg kialakult különböző irányairól, rámutat a dedukciós és az utána következő demonstrációs irányok túlzásaira és hibáira. A fizika történetének és a technikai alkalmazások tekintetbevételének kérdéseivel is foglalkozik, de nem elég kimerítően. Eppen e kérdésekben szükség volna az irányító alapelveknek, sőt a részleteknél is minél kimerítőbb megbeszélésére. Hasonlóképen az alapfogalmak bevezetésének és a filozófiai kapcsolatok tekintetbevételének kérdése is nagyon fontos. De ezeknek elmaradását nem róhatjuk fel hibául, mert a szerző tanulmányának címével is jelezte, hogy a tárgyhöz fűződő kérdéseket nem akarja kimerítőn tárgyalni.

Igen behatóan foglalkozik a tanulók laboratoriumi gyakorlatainak kérdésével. Megismertet történetével, leírja szerepét külföldi iskolákban. Arra a megállapodásra jut, hogy a kötelező és az előadásokkal szervesen összeshozott tanulói gyakorlatok felelnek meg leginkább a célnak.

Megismertet a fizika tanításának szerepével a honi középiskolai tantervekben. Ebből kitűnik az a meglepő tény, hogy minden régebbi tantervünk a fizikának több órát juttatott, mint a jelenleg érvényben levő. Kell, hogy e retrograd irányzat megdöbbenést keltsen mindazokban, akiknek szíven fekszik a közművelődés ügye, hiszen a fizika tanítása nemcsak a természettudományi gondolkodásmódnak, hanem az általános műveltség mélyítésének legfontosabb eszköze. Kell, hogy a fizikusok ki-
lépjenek csendes rezervált álláspontjukból és hallassák szavukat a jövő nevelés irányának meghatározásában.

A retrogradirányzat még feltünőbbé válik, ha összehasonlítjuk a külföldi viszonyokkal, melyekre a szerző is kitér, elég bőven ismertette a fizika helyét a külföld nagyobb államainak középiskolaiban.

Tanulmányának konklúziója gyanánt igyekszik megállapítani a fizika helyét a megreformált középiskolában. Az alsó fokozaton a III. és IV., a felső fokon a VI., VII. és VIII. osztály számára heti 4—4 órát szán. Kívánságát nem tekinthetjük túlzottnak, ha meggondoljuk, hogy ezekbe az órákba a kötelező és a tanításba beleszótt gyakorlatok is be vannak számítva.

Az anyag elosztására is ad tervezetet, de ezt a kérdést nem tekinthetem lényegesnek. Jól tudom, hogy a fizika alapfogalmainak tanításában megnyilvánuló nehézségeket sokan annak tulajdonítják, hogy a mechanika áll a tanítás élén; tehát a bajon úgy vélnek segíthetni, hogy a fizika tanítását más részével, pl. optikával vagy hőtannal kezdik. Véleményem szerint ezzel az eltolással a nehézségeket el nem hárítjuk, legfőlebb elodázzuk, de mindenesetre újakkal is tetézzük. A baj oka a tanítás módszerében rejlik. A hőtan és az optika azért tűnik fel könnyebbnek, mert e tárgyakban megelégszünk a leírással és a természeti törvényeknek indukció útján való megállapításával. A mechanika pedig azért nehezebb, mert itt régi tradíciók alapján mindenki dedukálni akar. Fordítsuk meg a dolgot: tanítsuk a mechanikát ép úgy, mint az optikát és a hőtant, vagyis elégedjünk meg e téren is a leírással és a természeti törvényeknek induktív megállapításával, akkor az ismert nehézségek nagyrészt el fognak tűnni.

M. S.

Kimutatás

az 1914. év folyamán befolyt díjakról.

A tagsági díjak megváltása czímen fizettek : Sárközy Pál
120 kor., Tóth Aladár 120 kor. Összesen 240 K.

Tagsági díjat fizettek :

Az 1906. évre : Dózsa Jakab 6 kor., Héjas Endre 8 kor.
Összesen 14 K.

Az 1907. évre : Aranyosi Miksa 10 kor., Faragó Andor
6 kor., Héjas Endre 2 kor., Pap Lajos 6 kor., Szily Kálmán
10 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen 40 K.

Az 1908. évre : Aranyosi Miksa 10 kor., Bóbita Endre
2 kor., Faragó Andor 6 kor., Fekete Jenő 10 kor., Hlatky Miklós
6 kor., Homor István 6 kor., Karlovitz László 10 kor., Klimkó
Mihály 6 kor., Mialovich Mór 10 kor., Pap Lajos 6 kor.,
Szily Kálmán 10 kor., Tatár Balázs 6 kor., Zettner Ede 10 kor.
Összesen 98 K.

Az 1909. évre : Antal Márkus 10 kor., Aranyosi Miksa
10 kor., Bóbita Endre 6 kor., Bugarszky István 10 kor., Fe-
kete Jenő 10 kor., Hausbrunner Vilmos 10 kor., Hlatky Miklós
6 kor., Homor István 6 kor., Karlovitz László 10 kor., Klimkó
Mihály 6 kor., Mialovich Mór 10 kor., Pap Lajos 6 kor., Szily
Kálmán 10 kor., Tatár Balázs 6 kor., Zettner Ede 10 kor.
Összesen 126 K.

Az 1910. évre : Aranyosi Miksa 10 kor., Bóbita Endre
4 kor., Bugarszky István 10 kor., Fejes Zsigmond 6 kor., Fekete
Jenő 10 kor., Hausbrunner Vilmos 10 kor., Hlatky Miklós 6 kor.,
Homor István 3 kor., Karlovitz László 10 kor., Klimkó Mihály
6 kor., Kovács János 10 kor., Mialovich Mór 10 kor., Pap
Lajos 6 kor., Szabó Gábor 10 kor., Szily Kálmán 10 kor.,
Szontágh Gusztáv 6 kor., Tatár Balázs 6 kor., Zettner Ede
10 kor. Összesen 143 K.

Az 1911. évre : Asbóth Emil 10 kor., Bugarszky István
10 kor., Czuczy Emil 6 kor., Fejes Zsigmond 6 kor., Fekete

Jenő 10 kor., Fodor László 6 kor., Hlatky Miklós 2 kor., Karlovitz László 10 kor., Klimkó Mihály 6 kor., Kovács János 10 kor., Lóky Béla 6 kor., Mialovich Mór 10 kor., Pap Lajos 6 kor., Szabó Gábor 10 kor., Szily Kálmán 10 kor. Összesen... 118 K.

Az 1912. évre: Andor Tivadar 10 kor., Asbóth Emil 10 kor., Beke Manó 10 kor., Bugarszky István 10 kor., Czuczy Emil 6 kor., Fekete Jenő 10 kor., Fertig Vilmos 10 kor., Fodor László 6 kor., Hajdú Pál 10 kor., Karlovitz László 10 kor., Klimkó Mihály 6 kor., Lóky Béla 6 kor., Mialovich Mór 10 kor., Pap Lajos 6 kor., Polczer Kálmán 10 kor., Strausz Hermann 10 kor., Szabó Péter 10 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szily Kálmán 10 kor. Összesen... 166 K.

Az 1913. évre: Andor Tivadar 10 kor., Asbóth Emil 10 kor., Baló Gyula 6 kor., Bálint Elemér 10 kor., Beke Manó 10 kor., Benda Jenő 10 kor., Bertram Brunó 6 kor., Bodola László 6 kor., Borosay Dávid 6 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Bugarszky István 10 kor., Czakó Adolf 10 kor., Czuczy Emil 6 kor., Demeter István 6 kor., Dombay Nárczisz 6 kor., Emszt Kálmán 10 kor., Fabinyi Rezső 6 kor., Fekete Jenő 10 kor., Fertig Vilmos 10 kor., Fodor László 6 kor., Habán Mihály 6 kor., Hajnóczi Sándor 6 kor., Halász Ernő 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Karlovitz László 10 kor., Klimkó Mihály 6 kor., Klupathy Jenő 10 kor., ifj. Konkoly-Thege Miklós 6 kor., Kunszt János 6 kor., Léber Gyula 6 kor., Lóky Béla 6 kor., Luckhaub Gyula 6 kor., Marczell György 10 kor., Markos Imre 6 kor., Mialovich Mór 10 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Pekár Dezső 10 kor., Radó Simon 10 kor., Ratkovszki Pál 6 kor., Salamon Ernő 6 kor., Straub L. Gyula 6 kor., Strausz Hermann 10 kor., Szabó Péter 10 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szily Kálmán 10 kor., Szmodics Kázmér 6 kor., Tangl Károly 6 kor., Wodetzky József 10 kor. Összesen... 390 K.

Az 1914. évre: Ábrahám István 10 kor., Andor Tivadar 10 kor., Arató Frigyes 6 kor., Asbóth Emil 10 kor., ifj. Andreánszky István báró 6 kor., Baintner Géza 6 kor., Bak Elza 10 kor., Bakács Jolán 6 kor., Bakó Kálmán 6 kor., Balla József 6 kor., Baló Gyula 6 kor., Baranyi Balázs 6 kor., Bartóniek Emil 10 kor., Bauer Klára 10 kor., Bauer Mihály 10 kor., Bertram Brunó 6 kor., Bielek Miksa 10 kor., Blau Ármin 6 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bodola László 6 kor., Bodócs István 4 kor., Bogyó Samu 10 kor., Borosay Dávid 6 kor., Bozóky Endre 10 kor.,

Bresztovszky Béla 10 kor., Bricht Lipót 10 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Bugarszky István 10 kor., Csefő Sándor 6 kor., Csonka Mihály 6 kor., Csopey László 10 kor., Csősz László 6 kor., Czakó Adolf 10 kor., Czekeliusz Aurél 10 kor., Dávid Lajos 6 kor., Demeczky Mihály 10 kor., Dombay Nárcisz 6 kor., Domonkos Kálmán 6 kor., Éber József 10 kor., Ehrenhaft Félix 6 kor., Ellend József 6 kor., Eltscher Simon 6 kor., Emszt Kálmán 10 kor., Farkas Gábor 6 kor., Farkas Gyula 6 kor., Fekete Jenő 10 kor., Fenyvesi Andor 6 kor., Félegyházi Antal 6 kor., Frank István 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., Goldziher Károly 10 kor., Grosschmid Lajos 10 kor., Gotléb Béla 10 kor., Gulyás Károly 6 kor., Gyulay Zoltán 6 kor., Hajós Géza 6 kor., Halász Ernő 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hoffmann Ernő 10 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Ilosvay Lajos 10 kor., Jánosi Imre 10 kor., Javorik János 6 kor., Jordán Károly 10 kor., Juckel Gyula 10 kor., Karlovitz László 10 kor., Kálmán József 6 kor., Keul Frigyes 6 kor., Kherndl Antal 10 kor., Kilezer Gyula 6 kor., Király Henrik 6 kor., Klatt Román 6 kor., Klimkó Mihály 6 kor., Klug Lipót 6 kor., Klupathy Jenő 10 kor., Korda Dezső 6 kor., Koren Dénes 10 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Ferencz 6 kor., Kovács I. Kandid 6 kor., Kövesligethy Radó 10 kor., Kunszt János 6 kor., Kuzaila Péter 6 kor., Léber Gyula 6 kor., Lendvai Hugó 6 kor., Lengyel Miksa 10 kor., Léway Ede 10 kor., Loykó Béla 6 kor., Lóky Béla 6 kor., Luckhaub Gyula 6 kor., Magi Ferencz 6 kor., Maksai Gyula 10 kor., Marczell György 10 kor., Markos Imre 6 kor., Mattyasóvszky Kasszián 6 kor., Mihálovich Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Milakovszky László 6 kor., Molnár Imre 6 kor., Müller József 10 kor., szőkefalvi Nagy Gyula 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Nyáry Béla 6 kor., Nyirő Jolán 6 kor., Olajos János 6 kor., Oltay Károly 10 kor., Ortway Rezső 6 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pécsi Albert 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Pekár Dezső 10 kor., Pék János 6 kor., Pogátsa János 6 kor., Pogány Béla 10 kor., Pogány Iduna 10 kor., Prokesch Ignác 6 kor., Purpriger István 6 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignác 10 kor., Rátz László 10 kor., Renner János Lajos 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Rhorer László 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Rybár István 10 kor., Scholtz Ágost 2 kor., Schrodt

István 10 kor., Schuller Lajos 6 kor., Selényi Pál 10 kor., Sinkó József 6 kor., Skopál István 10 kor., Somogyi Antal 10 kor., Soós Sándor 6 kor., Sós Ernő 10 kor., Straub L. Gyula 6 kor., Straub Sándor 10 kor., Szabó Jenő 6 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Szász Ottó 6 kor., Székely Károly 6 kor., Szekeres Kálmán 10 kor., Széky István 10 kor., Szily Kálmán 10 kor., Szmodics Kázmér 6 kor., Szuppán Vilmos 10 kor., Terstyánszky Sándor 6 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Tillinger Istvánka 10 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Tomits Iván 10 kor., Ujj Gyula 10 kor., Ulreich Ede 6 kor., Vajnoczky István 10 kor., Vámos Dezső 10 kor., Vörös Cyrill 10 kor., Weber Márton 6 kor., Wodetzky József 10 kor., Závodszy Adolf 10 kor., Zemplén Géza 10 kor., Zemplén Győző 10 kor., Zilahy László 6 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen 1352 K.

Az 1915. évre: Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Kirchknopf András 6 kor., Mattyasóvszky Kasszián 6 kor., Pap János 2 kor., Sinkó József 6 kor., Szily Kálmán 10 kor. Összesen 40 K.

Az 1916. évre: Pap János 6 kor., Szily Kálmán 10 kor. Összesen 16 K.

Az 1917. évre: Pap János 2 K.

Előfizetési díjat fizettek:

Az 1908. évre: Temesvári áll. felsőbb leányiskola 10 K.

Az 1909. évre: Késmárki ág. h. ev. liczeum 10 kor., Temesvári áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Temesvári felső kereskedelmi iskola 10 kor. Összesen 30 K.

Az 1910. évre: Késmárki ág. h. ev. liczeum 10 kor., Temesvári áll. felsőbb leányiskola 10 kor. Összesen 20 K.

Az 1911. évre: Temesvári áll. felsőbb leányiskola 10 K.

Az 1912. évre: Budapesti II. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Temesvári áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Temesvári áll. főgimnázium 10 kor., Temesvári áll. főreáliskola 10 kor. Összesen 40 K.

Az 1913. évre: Aradi áll. főreáliskola 10 kor., Brádi áll. polgári fiúiskola 10 kor., Budapesti X. ker. (tisztviselőtelepi) áll. főgimnázium 10 kor., Dési áll. főgimnázium 10 kor., Kaposvári áll. főgimnázium 10 kor., Kisujszállási ref. főgimnázium 10 kor., Kolozsvári áll. polgári fiúiskola 10 kor., Szekszárdi áll. főgimnázium 10 kor., Székelyudvarhelyi ref. főgimnázium 10 kor., Temesvári áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Ungvári kir. kath. főgimnázium 10 kor. Összesen 110 K.

Az 1914. évre: Aradi áll. főreáliskola 10 kor., Aradi

kir. kath főgimnázium 10 kor., Bártfai áll. főgimnázium 10 kor., Békéscsabai ág. h. ev. Rudolf-főgimnázium 10 kor., Brassói áll. főreáliskola 10 kor., Bruck Sándor 10 kor., Budapesti IV. ker. közs. felsőbb leányiskola 10 kor., Budapesti IV. ker. közs. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. tanítónőképzőintézet 10 kor., Budapesti tanárképzőintézet gyakorlati főgimnázium 10 kor., Budapesti VIII. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti X. ker. (kőbányai) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti Norbertinum főkormányzósága 10 kor., Budapesti ciszt. r. tanárképző előjárósága 10 kor., Budapesti kir. magy. tudomány-egyetem könyvtára 10 kor., Budapesti VIII. ker. közs. felső kereskedelmi iskola 10 kor., Csíkszeredai róm. kath. főgimnázium 6 kor., Debreczeni áll. főreáliskola 10 kor., Debreczeni ref. főgimnázium fizikai szertára 10 kor., Erzsébetvárosi áll. főgimnázium 10 kor., Egri áll. főreáliskola 10 kor., Fiumei áll. főgimnázium 10 kor., Fiumei áll. polgári fiúiskola 10 kor., Fogarasi áll. főgimnázium 10 kor., Győri áll. főreáliskola 10 kor., Gyulai róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyergyószentmiklósi áll. főgimnázium 10 kor., Hajdúnánási ref. főgimnázium 10 kor., Hepke Bertalan 10 kor., Jászberényi áll. főgimnázium 10 kor., Karczagi ref. főgimnázium 10 kor., Kecskeméti áll. főreáliskola 10 kor., Kecskeméti ref. főgimnázium 6 kor., Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 10 kor., Makói áll. főgimnázium 10 kor., Marosvásárhelyi róm. kath. főgimnázium 10 kor., Nagyenyed Bethlen-főiskola könyvtára 10 kor., Nagyszebeni áll. főgimnázium 10 kor., Nagykállói áll. főgimnázium 6 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Podolini kegyesr. főgimnázium 10 kor., Pozsonyi kir. kath. főgimnázium 10 kor., Privigyei kegyesr. főgimnázium 10 kor., Soproni ág. h. ev. liceum 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 10 kor., Szakolczai kir. kath. főgimnázium 10 kor., Szamosújvári áll. főgimnázium 6 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgimnázium 10 kor., Szászvárosi ref. Kún-kollégium 6 kor., Székelyudvarhelyi róm. kath. főgimnázium 10 kor., Székesfehérvári áll. fels. leányiskola 10 kor., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 kor., Szolnoki áll. polgári fiúiskola 10 kor., Ujvidéki kir. kath. főgimnázium 10 kor., Ungvári kir. kath. főgimnázium 10 kor., Zilahi ref. Wesselényi-kollégium 10 kor. Összesen 580 K.

Az 1915. évre : Malaczкаи zárdafőnökség 10 kor., Nagy-
enyedi Bethlen-főiskola könyvtára 6 kor. Összesen 16 K.

Összesen befolyt :

Tagsági díjak megváltásából	240 K.
Hátralékos tagdíjakból	1095 „
F. és jövő évi tagsági díjakból	1410 „
Előfizetési díjakból	816 „

Összesen : 3561 K

Budapesten, 1914. évi deczember hó 31-én.

Privorszky Alajos
pénztárnok.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

24. évfolyam.

1915. márc.—ápr.

3—4. füzet.

A FELÜLETRE VONATKOZÓ JORDAN-TÉTEL MEGFORDÍTÁSA.

A térben a felületre vonatkozó JORDAN-tételnek, azaz a JORDAN-tétel térre való kiterjesztésének megfordítása nem végezhető el a síkbeli feltételekhez hasonló feltételek mellett.¹ A síkban egy H halmaznak egy körre való kölcsönösen egyértékű és folytonos leképezhetőségéhez elegendő, ha teljesülnek a következő — egyébként szükséges — feltételek:

1. a H halmaz zárt,
2. a síkot két összefüggő területre osztja szét,
3. a H bármely pontja ezen területek belső pontjaiból a terület belsejében haladó folytonos úttal elérhető.

A térben, mint L. E. J. BROUWER egy példán kimutatta,² e feltevések nem elegendők. A H -nak egy F felületre való kölcsönösen egyértékű és folytonos leképezhetőségéhez, amint gömbfelület esetében e példán is igazolható, nem elegendő feltenni, hogy a térnek a H -n kívül levő részei magukban is, kölcsönösen is, époly összefüggési viszonyokkal bírnak, mint az F felületen kívül levő részei és hogy a H bármely pontja, mint a tér egy H -n kívül levő részének határpontja, ennek pontjaiból egy benne haladó folytonos úton elérhető. Az elérhetőség feltételét tehát egy «erősebb» feltétellel pótoljuk, amely a H -n kívül

¹ A síkbeli megfordításra nézve l. különösen: A. SCHOENFLIES, Beiträge zur Theorie der Punktmengen, Math. Ann. 1903. 195. old. és RIESZ F., Über einen Satz der Analysis situs, u. o. 1904. 409. old., vagy A. SCHOENFLIES, Bericht über die Lehre von Punktmannigfaltigkeiten II, mely egyéb idevonatkozó kérdéseket is tárgyal.

² Math. Ann. 1911. 321. old.

levő térnek a H közelében való magatartására vonatkozik és amelyben kifejezett tulajdonságát a H -nak — más formában ugyan — L. E. J. BROUWER az «Unbewalltheit» névvel jelöli és teljesültét minden «JORDANSche Mannigfaltigkeit»-ra igazolja.

E dolgozat tárgya a gömbfelületre vonatkozó térbeli JORDAN-tétel megfordítása. Feltételeink a következők:

Legyen H egy zárt, korlátos ponthalmaz a térben, mely a térnek rajta kívül levő pontjait úgy osztja két részre, B és K -ra, hogy

1. a B (és hasonlóan a K) bármely két pontja összeköthető egy véges számú egyenes darabból álló poligonúttal, amely egészen a B (K) belsejében van,

2. a B (K) belsejében levő bármely zárt poligon a B -ben (K -ban) a H érintése nélkül folytonos deformációval egy ponttá összehúzható,

3. bármely poligonút, mely a B egy pontját a K egy pontjával köti össze, tartalmazza a H -nak legalább egy pontját,

4. H bármely pontja torlódási pontja egy B -beli U_{b_1}, U_{b_2}, \dots s egy K -beli U_{k_1}, U_{k_2}, \dots pontsorozatnak,¹

5. ha $U_1 U'_1, U_2 U'_2, \dots$ oly pontpárok sorozata a B -ben (vagy K -ban), hogy az U, U' pontok távolsága, ε , növekvő ν -vel a 0-ig csökken és az összes pontok a H egy R pontjában torlódnak, akkor e pontok kettőnként olyan l_1, l_2, \dots poligonutakkal köthetők össze a B (K) belsejében, melyek külön-külön véges számú egyenesdarabból állanak és egy 0-ig csökkenő sugarú gömbsorozat egy-egy gömbjébe zárhatók.²

¹ E feltételekből következik az is, hogy a H halmaz összefüggő. Mert ha létezne egy H -n kívüli F felület, melyen kívül is, belül is vannak a H -nak, s így B -nek és K -nak is pontjai, akkor F egészen csak a B -ben (vagy K -ban) lenne s egy F -en belül levő U_{k_1} s rajta kívül levő U_{k_2} K -beli pontokból álló pontpár csak a B -beli F -en át volna összeköthető egymással, ami ellenkezik az 1. feltétellel.

² Ez az a feltevés, mely a B -nek és a K -nak a H közelében való magatartását jelöli meg. Belőle már következik az elérhetőség, azaz hogy a H bármely R pontja a B egy U_{b_1} (vagy a K egy U_{k_1}) pontjával összeköthető egy (RU_{b_1}) — (vagy RU_{k_1}) poligonúttal, mely R -t kivéve, egészen a B -ben (K -ban) van és vagy véges számú egyenesdarabból áll, vagy ha végtelen sokból, akkor ezek egyetlen torlódási pontja az R pont. Mert egy R felé

Ha a H -halmazra ezen feltételek teljesülnek, akkor a H egy gömb felületére kölcsönös egyértékű és folytonos módon leképezhető.

ELSŐ RÉSZ.¹

1. §.

Folytonos görbének, vagy csak «görbé»-nek nevezzük az

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

koordináták által előállított pontthalmazt, ha x, y, z a t -nek folytonos és egyértékű függvényei. A t_0 és t_1 -hez tartozó pontok a görbe végpontjai. Ha e végpontok összeesnek, a görbe zárt, ellenkező esetben nyílt. Az előbbi J' -vel, ezt I' -vel jelöljük. J' egy j' körnek, I' egy i' egyenesdarabnak egyértékű és folytonos leképezése. Ha J' és j' , vagy I' és i' pontjai közt a megfelelés kölcsönösen egyértékű, J' és I' -t JORDAN-féle görbéknek nevezzük és J, I -vel, j', i' -t pedig j, i -vel jelöljük.

Az M halmazt « ε -nyi pontossággal»² megközelítő poliedrális felületet $F_\varepsilon(M)$ -el jelöljük, ennek belsejét, ha egy darabból áll, amelyben M is van, « $F_\varepsilon(M)$ test»-nek nevezzük. Így használjuk más felületnél is ezen elnevezést.

A zárt poligont II -vel, a nyílt poligonvonalat, azaz poligonutat E -vel, a síkbeli kör belső területére kölcsönös egyértékű és folytonos módon leképezhető poliedrális lapot L -lel, a hasonló módon gömbre leképezhető «gömbtípusú» poliedrális felületet G -vel jelöljük.

Egy M_1, M_2, \dots halmazsorozatot 0-ig csökkenő kiterjedésű-

tartó $U_{b_1}, U_{b_2}, \dots (U_{k_1}, U_{k_2}, \dots)$ pontsorozat szomszédos tagjai páronként összeköthetők az l_1, l_2, \dots utakkal s az (l_1, l_2, \dots) poligonút adja $(\overline{RU_{b_1}})$ -t — $(\overline{RU_{k_1}})$ -t. Ezen poligonutak, ha többszörös pontjaik vannak, ezektől elegendő kicsiny deformációk által tulajdonságaik változása nélkül szabadíthatók meg. A H bármely két P, Q pontja egymással is összeköthető a B (vagy K) belsejében egy $b(k)$ poligonúttal.

¹ Az első rész a definíciókat, jelölésmódokat és segédteteleket tartalmazza.

² «im Abstand ε ». L. SCHOENFLIES, Bericht über die Lehre von Punktmannigfaltigkeiten II. 105, 136. old.

nek nevezünk, ha a sorozat tagjai egyenként a 0-ig csökkenő sugarú G_1, G_2, \dots gömbökbe zárhatók.

Minden halmaz, melyre a folytonos deformációt és az át-fogást definiáljuk, zárt.

Zárt vagy nyílt poligonjaink közönségesen véges számú egyenesdarabból állanak, esetleg azonban végtelen sokból is, de ekkor hoszaik 0-ig csökkennek és a poligonnak csak véges számú pontjában torlódnak.

2. §.

Legyen az $M^{(o)}$ halmaz az M halmaznak folytonos és egyértékű képe, úgy, hogy $M^{(o)}$ nak lehetnek «többszörös» pontjai is. $M^{(o)}$ -nak a folytonos deformációja, vagy röviden: deformációja alatt általánosabb értelemben az $M^{(o)}$ oly időbeli deformációját értjük, melynél a t pillanatbeli deformált halmaz, $M^{(t)}$ szintén folytonos és egyértékű képe az M -nek, egészen általános értelemben, úgy, hogy egy M -beli zárt halmaznak az $M^{(o)}$, vagy $M^{(t)}$ -ben esetleg csak egy pont felel meg, és amely deformációnál minden pont a deformáció ideje alatt folytonos görbét ír le. Ha a deformáció végén a t pillanatban a $M^{(t)}$ egyetlen pontból áll, akkor $M^{(o)}$ -t «egy pontba húztuk össze». Ha $M^{(o)}$ azonos M -el, úgy, hogy nincsenek többszörös pontjai, akkor M -el jelöljük.

A poliedrális felületeknek és poligonoknak folytonos deformációjára nézve egyebek mellett különösen a következő tételeket használjuk fel:

1. Egy gömbtípusú G test a belsejével együtt egy rajta belül levő pontba deformálható önmagában való deformációval.

2. Legyen Π egy F poliedrális felületen levő többszörös pontok nélküli oly zárt poligon, amelyen át az F belsejében egy L lap fektethető át és amely egy más, az F -en belül levő F_1 felület vagy más halmaz érintése nélkül egy pontba összehúzható. Ha ezen L lap mentén való «szétmetszéssel» (3. *a, b.* ábr.) az F felület összefüggési rendszáma eggyel csökken, akkor a Π -n át oly L_1 lap is fektethető az F belsejében, mely az F_1 -et nem metszi.

3. Egy G gömbtípusú felület belsejében levő két nyílt po-

lignonvonal, ha végpontjaik közösek, a végpontok fix helyzete mellett egymásba deformálható a G belsejében úgy, hogy bármely pillanatban a deformált poligonvonal szintén poligonvonalat alkot.

4. Egy poliedrális felület, mely egy zárt M halmazt vesz körül, ha többszörös pontjai vagy vonalai vannak, — amilyen pl. a közös csúcs vagy él két, csúcsával vagy élével érintkező kocka felületénél, — kicsiny deformációkkal ezektől megszabadítható, úgy, hogy véges összefüggési rendszámmal bíró, többszörös pontok és vonalak nélküli felület, egy vagy esetleg több is, válik belőle, amely szintén magába zárja az M -t.

3. §.

Egy $M_1^{(o)}$ halmazról akkor mondjuk, hogy átfogja az $M_2^{(o)}$ halmazt, — amelynek egy pontja sem közös az $M_1^{(o)}$ -al, — ha nem húzható össze egy pontba anélkül, hogy deformáció közben legalább egyszer ne legyen közös pontja az $M_2^{(o)}$ -al. Ha ennek érintése nélkül húzható össze egy pontba, akkor át nem fogja. Ha $M_1^{(o)}$ át nem fogja $M_2^{(o)}$ -t, akkor még meglehet, hogy $M_1^{(o)}$ átfogja az $M_1^{(o)}$ -t.

1. Ha $M_1^{(o)}$ -t az $M_2^{(o)}$ érintése nélkül deformáljuk egy $M_1^{(o)}$ -be, akkor ez is aszerint átfogja vagy át nem fogja $M_2^{(o)}$ -t, amint $M_1^{(o)}$ átfogja vagy át nem fogja.

2. Ha $M_1^{(o)}$ és $M_2^{(o)}$ az $M_3^{(o)}$ -t át nem fogják és egyikök, pl. $M_2^{(o)}$ folytonos deformációval vihető át az M_1 és M_2 közös pontjai halmazának K_{12} -nek a képébe, $K_{12}^{(o)}$ -ba úgy, hogy deformáció közben $K_{12}^{(o)}$ fix helyzetű marad, akkor az M_1 és M_2 összes pontjaiból álló M_{12} halmaznak a képe, $M_{12}^{(o)}$ sem fogja át $M_3^{(o)}$ -t. Mert $M_2^{(o)}$ a $K_{12}^{(o)}$ -ba deformálható és ezzel, azaz $M_1^{(o)}$ -al együtt az $M_1^{(o)}$ deformációja által egy pontba húzható össze.

Ha $M_1^{(o)}$ át nem fogja $M_2^{(o)}$ -t, akkor bármely részhalmaza sem fogja át.

3. Legyen ε_1 és ε_2 oly kicsi, hogy $F_{\varepsilon_1}(M_1^{(o)})$ és $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ egymáson kívül vannak. Ha $M_1^{(o)}$ átfogja $M_2^{(o)}$ -t, akkor átfogja $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ -t is, mert különben ennek, tehát $M_2^{(o)}$ -nak érintése nélkül is egy

pontba volna összehúzható. Továbbá az $F_{\varepsilon_1}(M_1^{(o)})$ test és felület is átfogja $M_2^{(o)}$ -t és $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ -t, mert ellenkező esetben érintésük nélkül vele együtt az $M_1^{(o)}$ is egy pontba volna összehúzható.

Felhasználjuk még a poliedrális felületekre és zárt poligonokra vonatkozó következő tételeket:

4. Ha egy közönséges, önmagába nem hatoló poliedrális felület egy másik poliedrális felületet vagy zárt poligont átfog, akkor létezik a határán vagy a belsejében egy zárt poligon, amely azt szintén átfogja.

5. Ha egy zárt poligon egy másik halmazt át nem fog, akkor létezik egy gömbtípusú G poliedrális felület, azaz test, amelynek belsejében van az elsőnek minden pontja, míg a halmaznak egy pontja sem. Azonban a G test esetleg olyan, hogy önmagába hatol. Ilyenkor is, bizonyos pontjait többszörösen számítva, felületét és belsejét közönséges gömbtípusú felületnek és testnek tekintjük és ezek tételeit alkalmazzuk rá.

6. Ha egy G gömbtípusú poliedrális felületen a poligonvonalak által határolt és esetleg többszörösen összefüggő T_1, T_2, \dots, T_q területek sem önmagukat, sem egymást át nem fedik és egy többszörös pontok nélküli zárt Π poligont át nem fognak, akkor a Π -nek egy G -n belül levő U_b s egy G -n kívül levő U_k pontja által meghatározott E_1 és E_2 ivein található a G -vel való metszéspontjai közt két P, Q pont, — P az E_1 -n, Q az E_2 -n, — amelyek a T_1, T_2, \dots, T_q területek érintése nélkül köthetők össze a G felületén egy E poligonvonalal.

4. §.

Ha az $M_1^{(o)} \equiv M_1$ halmaznak nincsenek többszörös pontjai és át nem fogja az $M_2^{(o)}$ -t, akkor elég kicsiny ε_1 mellett az $F_{\varepsilon_1}(M_1)$ közelítő felület és test sem fogja át $M_2^{(o)}$ -t.

M_1 legyen összefüggő halmaz.

Kicsiny ε_2 mellett mindazon pontok, melyeket az M_1 egy pontba való bizonyos összehúzása közben érint, az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ -n kívül vannak, úgyhogy M_1 ezt sem fogja át. Ha tételünk nem

áll, akkor tehát $F_{\varepsilon_1}(M_1)$ bármily kicsiny ε_1 mellett átfogja az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ -t, bár maga M_1 át nem fogja.

Létezik oly kicsiny ε , hogy az M_1 bármely pontja körül irt $\varepsilon/2$ sugarú G_ε gömbön kívül van az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ és hogy, ha $P^{(o)}, Q^{(o)}$ bármely két ε távolságú pontja az M_1 -nek, akkor az őket összekötő $l^{(o)}$ egyenesdarab maga és bármely pillanatban deformáció közben a $P^{(t)}, Q^{(t)}$ pontokat összekötő $l^{(t)}$ sem tartalmazza az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ -nak egy pontját sem. $l^{(o)}$ tehát a változó t idejű $l^{(t)}$ helyzeteken át M_1 -el együtt az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ érintése nélkül egy pontba húzható össze.

BOREL tétele szerint a G_ε gömbökből kiválasztható véges számú úgy, hogy az M_1 bármely pontja legalább egynek közülk a belső pontja legyen. Ezen véghesszámú gömb alkotta F_g test a külső felületén nem tartalmazza az M_1 -nek egy pontját sem és átfogja az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ -t, ha bármily kicsiny ε_1 mellett az $F_{\varepsilon_1}(M_1)$ is átfogja, mert elegendő kicsiny ε_1 mellett az $F_{\varepsilon_1}(M_1)$ egészen az F_g belsejében van. Létezik tehát az F_g belsejében (3. §. 4.) egy, véghesszámú egyenesdarabból álló zárt Π' poligon, amely átfogja az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ -t. Ha egy $R_0^{(o)}$ pont G_ε -féle gömbjéből kiindulva a Π' poligon az $R_1^{(o)}$, azután az $R_2^{(o)}$ pont stb. gömbjébe ér, akkor ezen M_1 -beli

$$R_0^{(o)}, R_1^{(o)}, R_2^{(o)}, \dots, R_n^{(o)} \equiv R_0^{(o)}$$

pontok sorozatának, — amely sorozatban egy pont többször is előjöhethet, — a G_ε -féle gömböknek egy

$$G_0, G_1, G_2, \dots, G_n \equiv G_0$$

lánca felel meg, amely maga is, mint test, és a benne levő $R_v^{(o)}R_{v+1}^{(o)}$ szomszédos pontpárokat összekötő $l_v^{(o)}$ egyenes vonal-darabokból összeállított

$$\Pi^{(o)} \equiv (l_0^{(o)}, l_1^{(o)}, \dots, l_n^{(o)})$$

zárt poligon is átfogja az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ -t, mert Π' e gömbökön belül a $\Pi^{(o)}$ -ba deformálható. Ezen $\Pi^{(o)}$ poligon azonban a változó t idejű

$$\Pi^{(t)} \equiv (l_0^{(t)}, l_1^{(t)}, \dots, l_n^{(t)})$$

poligonokon át az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(0)})$ érintése nélkül az M_1 -el együtt egy pontba húzható össze, ami nem lehetséges, ha átfogja $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(0)})$ -t, mert a $H^{(t)}$ poligon minden t pillanatban zárt poligon marad, mivel az $R_v^{(t)}$ pontoknál sohasem szakadhat ketté. M_1 -nek u. i. többszörös pontjai nincsenek és így deformáció közben egy $R_v^{(0)}$ sem válhatik két ponttá.

$F_{\varepsilon_1}(M_1)$ tehát nem foghatja át bármily kicsiny ε_1 mellett az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(0)})$ -t és így $M_2^{(0)}$ -t sem.

5. §.

Legyen $M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, \dots$ 0-ig csökkenő kiterjedésű halmazok sorozata, melyek valamennyien átfogják az $M^{(0)}$ -t és az R pontban torlódnak. Akkor R az $M^{(0)}$ -nak a pontja.

Ha R az $M^{(0)}$ -tól különböző pont, akkor egy véges sugarú G gömböt lehet írni köréje, amelyen kívül van az $M^{(0)}$ minden pontja. Ekkor egy n indexen túl valamennyi $M_{n+v}^{(0)}$ a G belsejében lenne, tehát át nem fogná $M^{(0)}$ -t, a feltétel ellenére. És hasonló módon abból is, hogy $M^{(0)}$ fogja át a 0-ig csökkenő kiterjedésű és az R pontban torlódó $M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, \dots$ halmazokat, következik, hogy R az $M^{(0)}$ pontja.

6. §.

Ha egy G gömbtípusú test belsejében a P és Q pontokat az I' görbe és az E_0 poligonvonal kötik össze, akkor ezek a P és Q pontok fix helyzete mellett egymásba deformálhatók a G belsejében.

I' egy i' egyenesdarabnak a képe. Ez utóbbit n egyenlő részre osztjuk a

$$p_0^{(1)} \equiv p, p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_n^{(1)} \equiv q$$

pontokkal, ha p és q a végpontok.

Az I' -beli megfelelő

$$P_0^{(1)} \equiv P, P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_n^{(1)} \equiv Q$$

pontokat, ha n elég nagy, a G belsejében lehet páronként össze-

kötni az $l_v^{(1)} = (P_v^{(1)} P_{v+1}^{(1)})$ egyenesdarabokkal. Ily módon egy poligonvonal származott:

$$E_1 \equiv (l_0^{(1)}, l_1^{(1)}, \dots, l_{n-1}^{(1)}).$$

Egy-egy $(p_v^{(1)} p_{v+1}^{(1)})$ intervallumot ismét n részre osztunk a

$$p_0^{(2)} \equiv p_v^{(1)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots, p_n^{(2)} \equiv p_{v+1}^{(1)}$$

pontokkal. A megfelelő

$$P_0^{(2)} \equiv P_v^{(1)}, P_0^{(2)}, \dots, P_n^{(2)} \equiv P_{v+1}^{(1)}$$

pontokat páronként a G belsejében az

$$l_0^{(2)}, l_1^{(2)}, \dots, l_{n-1}^{(2)},$$

egyenesekkel kötjük össze. A

$$\lambda_v^{(1)} \equiv (l_0^{(2)}, l_1^{(2)}, \dots, l_{n-1}^{(2)})$$

poligonvonalak együtt az

$$E_2 \equiv (\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{n-1}^{(1)})$$

poligonvonalat adják, mely szintén a P, Q pontokat köti össze.

Hasonló módon szerkesztjük az E_3 -at, melynél egy-egy

$$l_r^{(2)} \quad (r=0, 1, 2, \dots, n^2-1)$$

egyenesét az E_2 -nek a

$$\lambda_r^{(2)} \equiv (l_0^{(3)}, l_1^{(3)}, \dots, l_{n-1}^{(3)})$$

poligonvonallal helyettesítjük és

$$E_3 \equiv (\lambda_0^{(2)}, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{n^2-1}^{(2)})$$

tesszük. Ezt így vég nélkül folytatjuk. Az

$$(l_{r_1}^{(1)} \lambda_{r_1}^{(1)}) \quad (r_1=0, 1, \dots, n-1)$$

poligonokat egy-egy G_{ε_1} gömbbe, az

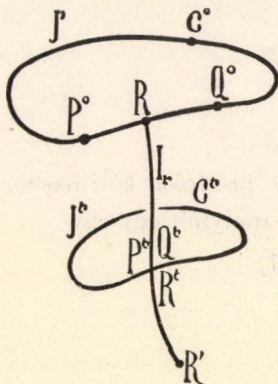
$$(l_{r_2}^{(2)} \lambda_{r_2}^{(2)}) \quad (r_2=0, 1, \dots, n^2-1)$$

poligonokat egy-egy G_{ε_2} gömbbe stb. zárjuk. Ha G belsejében E_0 -t az E_1 -be deformáljuk a végpontok fix helyzete mellett s hasonlóan minden $l_v^{(v)}$ -t a megfelelő $\lambda_v^{(v)}$ -be a megfelelő G_{ε_v} -ben és az összes $G_{\varepsilon_1}, G_{\varepsilon_2}, \dots$ gömbök sugarai növe ν -vel a 0-ig csökkennek, akkor így E_0 az I' -be deformálódik a kívánt módon az E_k poligonvonalak közvetítésével. Hasonlóan egy E_0 közvetítésével a P, Q pontokat a G belsejében összekötő két tetszőszerinti I'_1, I'_2 görbe is egymásba deformálható.

7. §.

Ha egy zárt J' görbe át nem fogja az $M^{(0)}$ halmazt, akkor bármely saját R pontjába is összehúzható ezen pont fix helyzete mellett az $M^{(0)}$ érintése nélkül.

J' egy j' körnek a képe. Az R pont általában egy j' -beli zárt halmaz összes pontjainak a képe. Ahhoz, hogy tételünk igaz legyen, szükséges és elégséges, hogy a j' ezen halmazon kívüli j'_1, j'_2, \dots íveinek megfelelő J'_1, J'_2, \dots zárt görbék (melyekhez az R pontot is hozzászámítjuk) legyenek 0-ig csökkenő sugarú gömbök belsejében egyenként az R -be, ennek fix helyzete mellett, összehúzhatók.



1. ábra.

Mivel R az $M^{(0)}$ -tól különböző pont, azért az J'_v görbék egy elég nagy indextől kezdve R körül írt, 0-ig csökkenő sugarú gömbökbe zárhatók s ezekkel együtt az R -be összehúzhatók. A megmaradt véges számú J'_v görbék bármelyikét ismét J' -vel jelöljük, azaz ez utóbbiról feltehetjük, hogy R -nek egyetlen r pont felel meg a j' -ben. Ha J' az $M^{(0)}$ -et át nem fogja, akkor ennek érintése nélkül húzható össze valamely R' pontba a $(t_1 \leq t \leq t_2)$ időközben a D deformációval.

J' -nek az R pontba való összehúzását a $(0, t_1)$, (t_1, t_2) , (t_2, t_3) időközökben a következő módon végezzük (1. ábra). Legyen p, q két egymástól és az r -től különböző pontja a j' -nek. J' -beli megfelelő pontjaik $P^{(0)}, Q^{(0)}$. A $(0, t_1)$ időközben a J' -t önmagában oly módon deformáljuk, hogy a $(P^{(0)}, R, Q^{(0)}) \equiv I_1^{(0)}$ ívét az R pontba húzzuk össze, míg a másik $(P^{(0)}, C^{(0)}, Q^{(0)}) \equiv I_2^{(0)}$ ívét végpontjaival az R pontig nyújtjuk ki.¹

Tehát $I_1^{(t_1)} \equiv R$ és $I_2^{(t_1)} \equiv J'$.

¹ $I_1^{(0)}$ és $I_2^{(0)}$ általában nem JORDAN-görbék.

A (t_1, t_2) időközben a deformációt úgy folytatjuk, hogy $I_1^{(1)}$ -et J' -nek a D deformációbeli $J'^{(t)}$ helyzetein át húzzuk össze az R' pontba $(t_1 \leq t \leq t_2)$, miközben végpontjai $P^{(t)}$ és $Q^{(t)}$ folyton azonosak maradnak a D -beli $R^{(t)}$ -vel és az $R^{(t)}$ által a D deformációban leírt I_r' görbét futják be. Ugyanekkor $I_1^{(t)}$ az I_r' -beli kétszeresen számított $(P^{(t)}R, RQ^{(t)})$ görbéből áll, amelyre ily sorrendben képezzük le a $(P^{(0)}R, RQ^{(0)})$ íveket. Tehát ezen deformációban $J'^{(t)} \equiv (P^{(t)}, R, Q^{(t)}, C^{(t)}, P^{(t)})$ és $I_1^{(t_2)} \equiv (R'R, RR')$, $I_2^{(t_2)} \equiv R'$. A $(t_2 \leq t \leq t_3)$ időközben I_r' -nek önmagában az R pontba való összehúzódása szolgáltatja az J' deformációját. Azaz $I_2^{(t)}$ most folyton egy pont marad és I_r' -n R' -ből az R -be halad, míg $I_1^{(t)}$ a kétszeresen számított, I_r' -beli $(R I_2^{(t)})$ ívből áll.

MÁSODIK RÉSZ.

8. §.

H legyen egy halmaz, melyre a bevezetésben említett feltételek teljesülnek.

Ha P_1Q_1, P_2Q_2, \dots olyan pontpárok sorozata a H -ban, amelyek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ távolságai 0-ig csökkennek s a pontok egy R pontban torlódnak, akkor ezen pontpárok a 0-ig csökkenő kiterjedésű $\beta_1 \equiv (\overline{P_1Q_1}), \beta_2 \equiv (\overline{P_2Q_2}), \dots$ poligonutakkal köthetők össze a B -ben.

Mert a B egy U_b pontjából e pontokhoz húzott B -beli $(\overline{U_bP_1}), (\overline{U_bQ_1}), (\overline{U_bP_2}), (\overline{U_bQ_2}), \dots$ poligonutakon lehet választani olyan $U_1, U'_1, U_2, U'_2, \dots$ pontokat, melyek szintén az R -ben torlódnak. E pontokat páronként az 5) feltétel szerint lehetséges $l_1 \equiv (\overline{U_1U'_1}), l_2 \equiv (\overline{U_2U'_2}), \dots$ 0-ig csökkenő kiterjedésű poligonutakkal kötjük össze és ekkor

$$\beta_1 \equiv (\overline{P_1U_1U'_1Q_1}), \beta_2 \equiv (\overline{P_2U_2U'_2Q_2}), \dots$$

A β_1, β_2, \dots -höz hasonló $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ poligonutak léteznek a K -ban. Feltehetjük, hogy ezen β_v, α_v utak egyike sem bír

többszörös ponttal, mert kicsiny deformációkkal ezektől megszabadíthatók.

Ebből az is következik, hogy bármily kicsiny δ -hoz található oly kicsiny ε , hogy a H bármely két, egymástól ε -nál kisebb távolságra levő P, Q pontjához található egy δ sugarú gömbbe zárható (β, α) zárt poligon. Mert ellenkező esetben található volna egy P_1Q_1, P_2Q_2, \dots pontpársorozat egy torló-dási ponttal és 0-ig csökkenő $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ távolságokkal, a mely-nél bármely P_vQ_v pontpárhoz csak egy véges δ -nál nagyobb sugarú gömbbe zárható (β_v, α_v) zárt poligon található, ami nem lehetséges.

9. §.

A H bármely két P, Q pontja összeköthető egy nyílt I JORDAN-féle görbével, mely egészen a H -hoz tartozik.

A P és Q pontokat a B -ben és K -ban a b és k poligon-utakkal kötjük össze. Feltehető, hogy a (b, k) zárt poligon-nak nincsenek többszörös pontjai. Az összekötő JORDAN-görbe szerkesztése bármely adott G gömbtípusú test belsejében végezhető, mihelyt a (b, k) poligon is egészen ennek a belsejében van. A G test esetleg önmagába is hatolhat.

A (b, k) poligonon át, ha nem hurkolt, egy L poliedrális lapot lehet fektetni a G belsejében. Ha hurkolt, akkor választ-hatók (2. ábra) olyan $\dots P_2, P_1, Q_1, Q_2, \dots$ pontok a b -n és $\dots P'_2, P'_1, Q'_1, Q'_2, \dots$ pontok a k -n, hogy ezen sorozatok bármelyike jobbfelé is, balfelé is vagy végeesszámú vagy végtelen sok tagból áll, de úgy, hogy a P_v és P'_v pontok külön s Q_v és Q'_v pontok külön egyidejűleg vannak véges vagy végtelen számmal s az előbbieket a P , az utóbbiak a Q pontban torló-dnak, továbbá e pontok — tekintet nélkül a H pontjaira, — a G belsejében úgy köthetők össze páronként a 0-ig csökkenő kiterjedésű

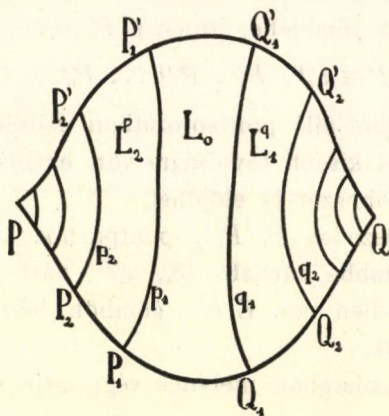
$$p_1 \equiv (\overline{P_1P'_1}), p_2 \equiv (\overline{P_2P'_2}), \dots q_1 \equiv (\overline{Q_1Q'_1}), q_2 \equiv (\overline{Q_2Q'_2}), \dots$$

poligonutakkal, hogy a

$$\dots (\overline{P_2 P_1 P'_1 P'_2}), (\overline{P_1 Q_1 Q'_1 P'_1}), (\overline{Q_1 Q_2 Q'_2 Q'_1}), \dots$$

zárt poligonok már nem hurkoltak és a 0-ig csökkenő kiterjedésű $\dots L_2^{(p)}, L_1^{(p)}, L_0, L_1^{(q)}, L_2^{(q)}, \dots$ poliedrális lapok fektethetők át rajtuk a G belsejében. Ezek általában egymást sokszorosan átmetszik, de ha egy pontot, mely több különálló $L_i^{(p)}$ vagy $L_i^{(q)}$ laphoz tartozik, mindegyikhez külön tartozónak számítunk, akkor e lapok összesen egy egyszerű L poliedrális lapot adnak, melynek határa a (b, k) poligon.

Legyen $\delta^{(1)}$ oly kicsiny szám, hogy egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömb, ha felületén vagy belsejében csak egy pontja is van az L -nek,



2. ábra.

egészen a G belsejében van. Továbbá legyen $\varepsilon^{(1)}$ oly kicsiny, hogy ha $P'Q'$ bármely két, $\varepsilon^{(1)}$ távolságú pontja a H -nak, található hozzájuk egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható (β, x) poligon. Ha tehát P', Q' az L -ben van, a (β, x) poligon a $\delta^{(1)}$ sugarú gömbbel együtt a G belsejében lesz.

A H -nak az L -ben levő pontjai egy zárt M halmazt alkotnak, amelynek az a tulajdonsága, hogy bármely L -beli poligonút, mely a b -nek egy U_b pontját a k -nak egy U_k pontjával köti össze, tartalmazza az M -nek legalább egy pontját. Az M minden pontja körül írjunk egy $\varepsilon^{(1)}/2$ sugarú gömböt. BOREL tétele szerint e gömbök közül kiválasztható végezzámos

úgy, hogy az M bármely pontja ezek közül legalább egynek a belsejében van. Számítsuk hozzájuk, ha oda nem tartoznának, a P és Q körül irt gömböket is. Ha $\varepsilon^{(1)}$ elég kicsiny, az U_b és U_k pontok e gömbökön kívül vannak. Ezen végeesszámú gömb egy összefüggő testet alkot, vagy kiválasztható belőlük egy összefüggő test, melynek belsejében van P is, Q is, mert különben található volna az L -ben egy poligonút, mely az U_b és U_k pontokat köti össze és e gömbökön, tehát a H pontjain is kívül van. Ezen test belsejében P és Q összeköthetők egy véges számú egyenesből álló λ poligonúttal, a mely az L -ből ki is léphet. Ha a λ út a P körül irt gömb elhagyása után a $P_1^{(1)}$ pont gömbjébe, innen a $P_2^{(1)}$ -ébe, stb. ér, a

$$P \equiv P_0^{(1)}, P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_n^{(1)} \equiv Q$$

végeesszámú tagból álló pontsorozatban bármely két szomszédos pont $\varepsilon^{(1)}$ -nél kisebb távolságra van egymástól. E sorozatban egy pont többször is előjöhethet.

Minden szomszédos $P_v^{(1)}P_{v+1}^{(1)}$ pontpárhoz található egy $\delta^{(1)}$ sugarú $G_v^{(1)}$ gömbbe zárható $(\beta_v, x_v)^{(1)}$ zárt poligon. Minden $G_v^{(1)}$ a G belsejében van. E $G_v^{(1)}$ gömbök bármelyikét röviden $G^{(1)}$ -el is jelöljük.

Egy i' egyenesdarabot, melynek végpontjai p és q , n egyenlő részre osztunk a

$$p \equiv p_0^{(1)}, p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_n^{(1)} \equiv q$$

pontokkal és ezeket a megfelelő $P^{(1)}$ pontokhoz rendeljük.

Ezután minden $G_v^{(1)}$ gömb belsejében folytatjuk a $(\beta_v, x_v)^{(1)}$ poligonnal azt, amit a (b, k) poligonnal a G belsejében tettünk. Azaz a $(\beta_v, x_v)^{(1)}$ poligonon át fektethető a $G_v^{(1)}$ belsejében egy esetleg önmagát metsző $L_v^{(1)}$ lap és ennek segítségével kiválasztható az $L_v^{(1)}$ -ben levő H -beli pontok közül olyan

$$P_v^{(1)} \equiv P_0^{(2)}, P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, \dots, P_{n_v}^{(2)} \equiv P_{v+1}^{(1)}$$

sorozat, a melyben két-két szomszédos pont egymástól $\varepsilon^{(2)}$ -nél kisebb távolságra van és egy a $G_v^{(1)}$ belsejében levő $\delta^{(2)}$ sugarú $G^{(2)}$ gömbben köthető össze egy $(\beta, x)^{(2)}$ zárt poligonnal.

i' -nek a $p_v^{(1)} p_{v+1}^{(1)}$ intervallumát n_v egyenlő részre osztjuk a

$$p_v^{(1)} \equiv p_0^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots, p_{n_v}^{(2)} \equiv p_{v+1}^{(1)}$$

pontokkal és ezeket a megfelelő $P^{(2)}$ pontokhoz rendeljük. Ezen eljárást folytatjuk minden $G^{(1)}$ gömbben, azután minden $G^{(1)}$ -nek minden $G^{(2)}$ gömbjében, stb., vég nélkül s úgy, hogy a $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots$ -féle gömbök minden olyan sorozatában, melynél bármely $G^{(i+1)}$ tagja a sorozatnak az előtte levő $G^{(i)}$ -n belül van, a megfelelő $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots$ számok és a $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}$ gömb-sugarak a 0 felé tartanak. Egy ily sorozatban levő sorozata a

$$P_v^{(1)} P_{v+1}^{(1)}, P_{v_1+1}^{(1)} P_{v_1+1}^{(2)}, P_{v_2}^{(3)} P_{v_2+1}^{(3)}, \dots \quad (\nu < n, \nu_1 < n_v, \dots)$$

pontpároknak egyetlen R torlódási ponttal bír a H -ban és ezen R -hez rendeljük az i' -ben levő, fokenként egymáson belül fekvő, hasonló nevű intervallumok egyetlen r torlódási pontját. Mindezt végezzük tekintet nélkül arra, hogy ily módon a H egy pontjához az i' -nek egy vagy több pontját rendeltük-e.

Mindazon pontjai a H -nak, melyekhez az i' valamely pontját rendeltük, egy I' folytonos nyílt görbét alkotnak, mely az i' -nek egyértékű és folytonos képe és a P, Q pontokat köti össze. I' -ből egy I nyílt JORDAN-görbét választunk ki, mely szintén a P, Q pontokat köti össze.

Két pontot, melyek az i' -ben különbözők, de az I' -beli megfelelő pontjaik összeesnek, azonosak, röviden «összeesőknek» nevezzünk az i' -ben. i' -ben a p -vel összeeső legmagasabb pont legyen p' és a $(p' q)$ intervallumban a q -val összeeső legalacsonyabb pont q' ($p' \equiv q'$). A $(p' q')$ intervallumban tehát már nem létezik olyan pont, amely a p', q' végpontok valamelyikével esne össze. A $(p' q')$ intervallumot felezzük a v ponttal. A $(p' v)$ intervallumban mindazon pontok, melyek mindegyikének van legalább egy összeeső ponttársa a $(v' q')$ intervallumban, ideértve a v pontot is, zárt halmazt alkotnak, a melynek van egy legalsó m pontja. Az m -mel a $(p' q')$ -ben összeeső legmagasabb pont legyen m' . Ha az előbbi halmaz-

nak egy pontja sem létezik, akkor m legyen azonos v -vel. Hasonlóan m' is azonos lehet a v -vel.

$$p' < m \leq v, \quad v \leq m' \leq q'.$$

A $(p'm) \equiv \lambda_1$ és $(m'q') \equiv \lambda_2$ intervallumokban az m, m' pontpárt kivéve nem létezik több olyan összeeső pontpár, melynek egyik pontja λ_1 -ben, a másik λ_2 -ben volna. Továbbá a λ_1, λ_2 intervallumok bármely végpontja egy belső pontjukkal sem eshetik össze. E tekintetben λ_1 is, λ_2 is a $(p'q')$ intervallumhoz hasonlít, ha tehát λ_1 -et a v_1, λ_2 -t a v_2 ponttal felezzük, ezek két oldalán meghatározhatók úgy az $m_1, m'_1; m_2, m'_2$

$$(p' < m_1 \leq v_1, \quad v_1 \leq m'_1 < m, \quad m' < m_2 \leq v_2, \quad v_2 \leq m'_2 < q')$$

pontpárok, amint m, m' -t határoztuk meg a $(p'q')$ -ben.

A $(p'_1m_1) \equiv \lambda_{11}, (m'_1m) \equiv \lambda_{12}, (m'_1m_2) \equiv \lambda_{21}, (m'_2q') \equiv \lambda_{22}$ intervallumok szintén birnak azzal a tulajdonsággal, hogy két-két szomszédos intervallum egymás felé eső végpontjait kivéve, amelyek összeeső pontok, nem létezik olyan összeeső pontpár, melynek két pontja a négy intervallum közül két különbözőben volna. Továbbá e négy intervallum egyikének a végpontja sem eshetik össze egy belső pontjával. Ezen eljárást az új intervallumok mindegyikében folytatjuk a felezőpontok segítségével s az új $\lambda_{111}, \lambda_{112},$ stb. intervallumokban és a továbbiakban is vég nélkül.

Az n -dik ismétléskor a 2^n számú, egymáson kívül levő intervallum szintén bir a λ_1, λ_2 vagy a $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$ intervallumok tulajdonságaival és növvő n -nel az összes intervallumok hosszai 0-ig csökkennek. Ha az intervallumokra osztást vég nélkül folytatjuk, az i' -nek mindazon pontjai, a melyek bármely n mellett a 2^n számú intervallum közül legalább egybe tartoznak, egy perfekt M halmazt alkotnak. Ha az M pontjait az i' -ben «összetoljuk», úgyhogy a kihagyott $(mm'), (m_1m'_1), (m_2m'_2), \dots$ intervallumok mindegyike egy ponttá húzódik össze és így végpontjaik azonosakká válnak, az M pontjai egy i kontinuummá válnak. I' -nek mindazon pontjai, amelyek

az M , azaz i valamely pontjához tartoznak, egy folytonos I görbét alkotnak, mely a P , Q pontokat köti össze és így i -nek folytonos és egyértékű képe. I -nek egy pontjához azonban már az i -nek szintén csak egy pontja tartozik. Mert ha I egy pontjához két különböző pont tartozna az i -ben, két különböző pont tartozna hozzá az i' -nek M halmazában is, anélkül, hogy e két pont az mm' , $m_1m'_1$, $m_2m'_2$, ... pontpárok közül való lenne. Ezen két pont tehát bármely n mellett a megfelelő 2^n számú λ intervallum belső pontjai közt lenne és pedig két különböző intervallumban, ha n oly nagy, hogy a 2^n számú intervallum mindegyikének a hossza kisebb, mint a két pont távolsága. Ez azonban az intervallumok tulajdonságai miatt nem lehetséges.

I tehát JORDAN-féle görbe.

Ha P_1Q_1 , P_2Q_2 , ... a H -nak olyan pontpárjai, hogy távolságaik ε_1 , ε_2 , ... 0-ig csökkennek és a H egy R pontjában torlódanak, akkor találhatók hozzájuk olyan (β_1, x_1) , (β_2, x_2) , ... zárt poligonok, melyek a 0-ig csökkenő sugarú G_1 , G_2 , ... gömbökbe zárhatók egyenként. Minden G_v belsejében az előbbi módon a (β_v, x_v) segítségével szerkeszthető egy I_v JORDAN-féle görbe, mely a P_v , Q_v pontokat köti össze, úgy hogy az I_1 , I_2 , ... sorozat tagjainak kiterjedése 0-ig csökken.

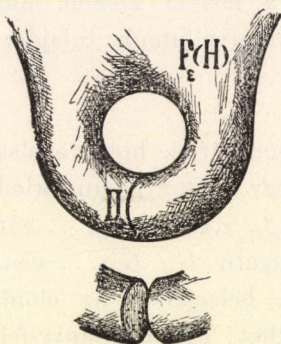
Ebből az is következik, hogy bármily kicsiny δ -hoz található oly kicsiny ε , hogy a H bármely két pontja, ha távolságuk ε -nál kisebb, egy δ sugarú gömbbe zárható JORDAN-görbével köthető össze.

10. §.

A H a B -ben és a K -ban egy-egy gömbtípusú poliedrális felülettel közelíthető meg. Azaz ha M bármily halmaz a B -ben, melynek egy torlódási pontja sincs a H -ban, akkor létezik a B -ben egy gömbtípusú $G_\varepsilon(H)$ felület, melyen belül van az M és kívülre a H . Feltehetjük, hogy az M összefüggő, mert különben egy $F_{\varepsilon'}(H)$ felülettel választható el a H -tól, úgyhogy az M ezen belül van s ha $F_{\varepsilon'}(H)$ -nak különálló darabjait, ha

ilyenek vannak, poligonutakkal kötjük össze a B -ben, ezek az $F_\varepsilon'(H)$ pontjaival együtt összefüggő halmazt alkotnak. Ha ezt zárjuk egy $G_\varepsilon(H)$ -ba, az M is ezen belül lesz.

Legyen $F_\varepsilon(H)$ a B -ben oly közelítő felület, mely az M -t egészen magában foglalja. Mivel az M összefüggő, $F_\varepsilon(H)$ -nak, ha több darabból áll, csak egyik darabjában lehet az M . Jelöljük ezt ismét $F_\varepsilon(H)$ -val. $F_\varepsilon(H)$, ha többszörös pontjai vagy vonalai vannak, megszüaditható ezektől anélkül, hogy az M megszűnne rajta belül s a H rajta kívül lenni (2. §. 4.). Ha eközben több darabra esik szét, ezeknek ismét csak egyikében



3. a, b ábra.

lehet az M és ezt is $F_\varepsilon(H)$ -val jelöljük. Így az $F_\varepsilon(H)$ véges összefüggési rendszámmal bíró, többszörös pontok és vonalak nélküli poliedrális felületté vált.

Legyen Π egy zárt poligon az $F_\varepsilon(H)$ -n, amelyen át egy L lap fektethető az $F_\varepsilon(H)$ -n kívüli térben (3. a. ábra, úgyhogy ha ennek mentén az $F_\varepsilon(H)$ -t «felmetszük», azaz két szomszédos L közti réteget az $F_\varepsilon(H)$ belsejéhez számítunk, a két L lapot pedig

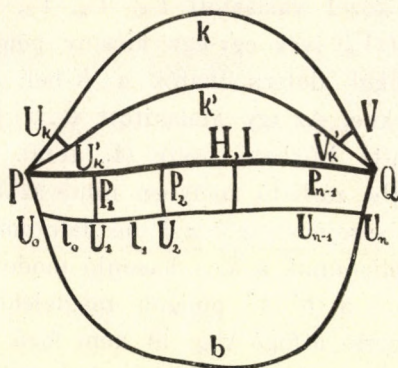
az $F_\varepsilon(H)$ -hoz, akkor az $F_\varepsilon(H)$ összefüggési rendszáma egygyel csökken (3. b. ábra). A Π poligon át nem foghatja a H -t, mert érintése nélkül a B -ben egy ponttá húzható össze, tehát (2. §. 2.) átfektethető rajta oly L_1 lap is az $F_\varepsilon(H)$ -n kívüli térben, mely egészen a B -ben van. Ezen L_1 mentén végezzük az előbbi metszést. Az eljárás véges számú ismétlése után az $F_\varepsilon(H)$ a gömbtipusú $G_\varepsilon(H)$ -vá alakul át, a melyen szintén belül van az M , mert minden metszés az $F_\varepsilon(H)$ -n kívüli térben történt.

11. §.

1. Legyen I' egy nyílt folytonos görbe a H -ban a P, Q végpontokkal, melynek egy H -beli más zárt M halmazzal egy

közös pontja sincs. I' az M érintése nélkül a végpontjait a B -ben összekötő b poligonútba (vagy egy K -beli k -ba) deformálható végpontjainak fix helyzete mellett.

I' -n a $P_0 \equiv P, P_1, P_2, \dots, P_n \equiv Q$ pontokat választjuk ki úgy, hogy két-két szomszédosnak a távolsága ε -nál kisebb legyen. A B -nek egy U pontjából húzott $(\overline{UP_0}), (\overline{UP_1}), \dots$ poligonutakon pedig az U_0, U_1, \dots pontokat (4. ábra) jelöljük ki, úgy, hogy $U_v P_v$ távolsága is, minden v mellett, ε -nál kisebb. Kicsiny ε mellett bármely $U_v U_{v+1}$ pontpár oly $l_v \equiv (\overline{U_v U_{v+1}})$ poligon-



4. ábra.

úttal köthető össze a B -ben, hogy I' -nek az $I'_v \equiv (P_v P_{v+1})$ íve a végpontjait összekötő $(\overline{P_v U_v U_{v+1} P_{v+1}})$ poligonúttal együtt egy kicsiny G_v gömbbe zárható, melyen kívül van az M , úgyhogy a G_v -ben az I'_v e poligonútba deformálható az M érintése nélkül (6. §.). A deformált I' a $(\overline{P_0 U_0 U_1 \dots U_n P_n})$ poligonútból és az $(\overline{U_1 P_1}), \dots, (\overline{U_{n-1} P_{n-1}})$ utakból áll. Ez utóbbiak önmagukban való deformálással az U pontokba húzhatók össze, a megmaradt $(\overline{P_0 U_0 U_1 \dots U_n P_n})$ pedig $(\overline{P_0 U_0})$ és $(\overline{U_n P_n})$ részeinek fix helyzete mellett a $b \equiv (\overline{P U Q})$ -ba deformálható a B -ben.

Hasonló módon lehet egy H -beli J' zárt görbét, melynek egy H -beli más M zárt halmazzal nincs közös pontja, ennek érintése nélkül a B (vagy K) egy pontjába összehúzni.

Az J' -n felvett $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \equiv P_0$ pontok által meghatározott I'_v görbeiveket az előbbi módon lehet a megfelelő l_v poligonutakba s ezáltal J' -t az $(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ zárt poligonba deformálni, a mely a B -ben egy ponttá húzható össze.

2. Legyen P, Q két pont a H -ban, melyek nem tartoznak egy H -beli zárt M halmazhoz. Ha a P, Q pontok egy (b, k) poligonja átfogja az M -t, akkor bármely más (b', k') poligonja is átfogja s ha az első át nem fogja, akkor ez sem fogja át.

A (k, k') poligon át nem fogja az M -t, mert a P -hez és Q -hoz rajta elegendő közel választott U_k, U'_k, V_k, V'_k pontok közti $(\overline{U_k P U_k})$ és $(\overline{V_k Q V_k})$ ívek egy-egy kicsiny gömb belsejében az M érintése nélkül deformálhatók a K -beli $l_p \equiv (\overline{U_k U'_k})$ és $l_q \equiv (\overline{V_k V'_k})$ ívekbe. Az így átalakított (k, k') poligon pedig a K -ban egy ponttá húzható össze (4. ábra). (k, k') tehát egy gömbtípusú testbe zárható, melyben nincs az M -nek egy pontja sem, és ennek belsejében a k a k' -be deformálható.

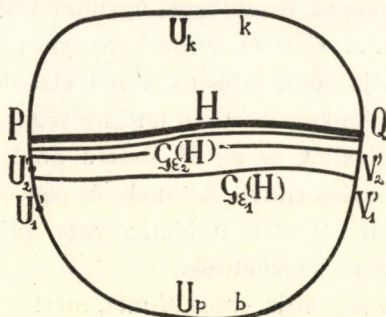
Így a (b, k) poligonnak a k , s hasonló módon a b íve vihető át deformációval a (b', k') poligon megfelelő ívébe, úgyhogy mindkettő egyszerre átfogó vagy át nem fogó poligon.

3. Ha a (b, k) poligon az M zárt halmazt át nem fogja, akkor a P, Q pontok egy M -n kívüli I JORDAN-görbével köthetők össze a H -ban. Mert ekkor (b, k) egy gömbtípusú testbe zárható, melyen belül nincs az M -nek egy pontja sem, ezen belül létezik egy I , mely a P, Q pontokat köti össze (9. §.).

Ha pedig (bk) az M -t átfogja, akkor nem létezik olyan I JORDAN-görbe (vagy csak folytonos görbe is) a H -ban, mely a P, Q pontokat köti össze és nem tartalmazza az M -nek egy pontját sem. Mert ha létezne egy ily I , az 1. szerint a k az I -be, ez pedig a b -be volna deformálható az M érintése nélkül, b pedig önmagában egy ponttá húzható össze, ami nem lehetséges, ha (b, k) az M -t átfogja.

4. Ha M egy zárt és többszörös pontok nélküli halmaz a H -ban és át nem fogja a P, Q pontokat összekötő (b, k) poligont, akkor P és Q egy M -n kívüli I JORDAN-görbével köthetők össze a H -ban.

Legyen $U'_1, U'_2, \dots, V'_1, V'_2, \dots$ két oly pontsorozat a b -n, hogy az első a P , a második a Q pontban torlódik úgy, hogy bármely U'_{v+1} és V'_{v+1} két pont a b -nek a (PU'_v) és (QV'_v) darabjaiban van. U_b legyen a b -nek egy pontja az U'_1, V'_1 pontok közt, U_k pedig a k egy pontja. Legyen továbbá $G_{\varepsilon_1}(H)$, $G_{\varepsilon_2}(H), \dots$ a H -t megközelítő oly gömbtípusú poliedrális felületek sorozata, hogy ezek növekvő index mellett összes pontjaikkal a H pontjaiban torlódznak és bármely ν mellett a $G_{\varepsilon_\nu}(H)$ belsejében van a b -nek az U'_v, V'_v pontok közt levő darabja és így az U_b pont is (5. ábra).



5. ábra.

Az M minden pontja körül írjunk $\varepsilon/2$ sugarú gömböt. Legyen az ε oly kicsi, hogy e gömbök egyike sem metszi a (b, k) poligont. BOREL tétele szerint kiválasztható a gömbökből véges számú úgy, hogy az M bármely pontja ezek közül legalább egynek a belsejében van. Kicsiny ε mellett a véges számú gömb alkotta F_g test szintén át nem fogja a (b, k) poligont (4. §.). A $G_{\varepsilon_\nu}(H)$ felületének mindazon pontjai, melyek az F_g belsejében vagy határán vannak, véges számú $T^{(v)}_g$ területet alkotnak a $G_{\varepsilon_\nu}(H)$ -n. Ezen területek poligonvonalak¹ által határolt és általában többszörösen összefüggő területek, melyek sem

¹ Itt általánosabb értelemben a körívek alkotta vonalakat is poligonoknak nevezzük.

önmagukat, sem egymást át nem fedik. Az $(\overline{U_b P U_k})$ és $(\overline{U_b Q U_k})$ poligonutaknak a $G_{\varepsilon_v}(H)$ -val való metszőpontjai közül kiválasztható tehát két U_v és V_v pont, melyek a $G_{\varepsilon_v}(H)$ felületén a $T_q^{(v)}$ területek érintése nélkül köthetők össze egy $E^{(v)}$ poligonúttal, mert a $T_q^{(v)}$ területek az F_g testtel együtt ennek belsejében a (b, k) poligon érintése nélkül húzhatók össze egy ponttá, tehát át nem fogják a (b, k) -t (3. §. 6.). Az U_1, U_2, \dots sorozat a P -ben, a V_1, V_2, \dots sorozat a Q -ban torlódik. Mindazon pontjai a H -nak, melyekben az $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots$ poligonutak torlódnak növekvő index mellett összes pontjaikkal, egy zárt M_e halmazt alkotnak. Ezen halmaz összefüggő, úgyhogy kiválasztható belőle egy $P_0 \equiv P_1, P_2, \dots P_n \equiv Q$ sorozat, melynek két-két szomszédos P_v, P_{v+1} pontja adott kicsiny ε' -nél kisebb távolságra van egymástól. Mert ellenkező esetben létezne végeesszámú F_1, F_2, \dots test, melyek különállók és az M_e összes pontjait a belsejökbe zárják. Azonban valamennyi $E^{(v)}$ -nek és így M_e -nek is volnának mégis pontjai e testek felületén vagy rajtuk kívül, úgyhogy ily testek nem létezhetnek.

M_e -nek egy közös pontja sincs M -mel, mert az $E^{(v)}$ utak mind az F_g testen kívül vannak. Kicsiny ε' mellett tehát bármely két P_v, P_{v+1} pont egy I_v JORDAN-görbével köthető össze a H -ban az M érintése nélkül. Az $(I_0, I_1, \dots I_{n-1})$ görbéből kiválasztható egy I JORDAN-görbe, mely a P, Q pontokat köti össze.

Ebből az is következik, hogy ha bármely I JORDAN-görbe, mely a H -nak két P, Q pontját köti össze, tartalmazza egy H -beli zárt M halmaznak legalább egy pontját, akkor M átfogja a P, Q -hoz tartozó bármely (b, k) poligont. Mert ha át nem fogná, létezne egy összekötő I JORDAN-görbe az M -en kívül. Ugyanakkor az M -hez tartozó F_g test kicsiny ε mellett nem metszi és átfogja a (b, k) -t. Található tehát benne (3. §. 4.) egy végeesszámú egyenesből álló Π' zárt poligon, mely szintén átfogja a (b, k) -t. Ha Π' az F_g -beli gömbök közül egy R_0 pont körül irt gömbből kiindulva, az R_1 , azután az R_2 stb. pont gömbjébe ér, akkor az ε -nál kisebb hosszúságú $\lambda_v \equiv (R_v, R_{v+1})$ egyenesdarabokból álló zárt $\Pi \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{n-1})$ poligon, mely

az $R_0, R_1, \dots, R_n \equiv R_0$ pontokon halad végig, szintén átfogja a (b, k) -t, mert a H' a H -be deformálható az F_g belsejében.

12. §.

A PQ pontokat összekötő (b, k) zárt poligonhoz található egy H -beli zárt J JORDAN-görbe, mely a (b, k) -t átfogja és egy P körül írt kicsiny ε sugarú G_ε gömb belsejébe zárható.

Legyen ε oly kicsiny, hogy Q a G_ε gömbön kívül van. P körül az ε_1 és ε_2 sugarakkal ($0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$) is írunk egy-egy G_{ε_1} és G_{ε_2} gömböt. H -nak azon pontjai, melyek a G_{ε_1} és G_{ε_2} felületén vagy e két gömb közt levő térben vannak, egy zárt M halmazt alkotnak, melyet a (b, k) poligon átfog. Mert ha a PQ pontokat bármily I JORDAN-görbével kötjük össze a H -ban, ez mint összefüggő halmaz áthalad a G_{ε_1} és G_{ε_2} közti téren és így tartalmazza az M -nek is bizonyos pontjait. Legyen δ oly kicsiny, hogy egy δ sugarú gömb, ha csak egy pontját is tartalmazza az M -nek, a (b, k) poligont és a G_ε gömböt egy pontban sem metszi. ε' megválasztható oly kicsinynek, hogy a H bármely két pontja, ha távolságuk ε' -nél kisebb, egy δ sugarú gömbbe zárható JORDAN-görbével köthető össze. Az M pontjaiból kiválaszthatók oly $R_0, R_1, \dots, R_n \equiv R_0$ pontok, amelyeknek a zárt $H \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ poligonja a (b, k) -t átfogja és két-két szomszédos R_v, R_{v+1} pont egy δ sugarú G_v belsejében egy I_v JORDAN-görbével köthető össze, mert távolságuk kisebb lehet ε' -nél. A G_v belsejében van a λ_v is, úgy, hogy minden G_v -ben, tehát a (b, k) poligon és a G_ε gömb érintése nélkül, lehet a λ_v -t végpontjainak fix helyzete mellett I_v -be deformálni. Ezáltal a H poligont az $J' \equiv (I_0, I_1, I_2, \dots, I_{n-1})$ zárt görbébe deformálhatjuk, mely a H -hez hasonlóan szintén átfogja a (b, k) -t és a G_ε belsejében van.

J' -ből egy zárt J JORDAN-görbét választunk ki, mely szintén átfogja a (b, k) -t.

Egy j' kört n egyenlő részre osztunk az $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n \equiv r_0$ pontokkal és a közbeeső $i_v \equiv (r_v, r_{v+1})$ ivateire képezzük le az I_v

görbéket úgy, hogy egy-egy R_v -nek az r_v pont felel meg. Így J' a j' körnek egyértékű és folytonos képe. Két pontot a j' -ben ismét összeesőnek nevezünk, ha J' -beli megfelelő pontjaik azonosak. A j' -ben és ennek megfelelően az J' -ben az

$$(r_0, r_1, r_2, \dots) \text{ és } (R_0, R_1, R_2, \dots)$$

pontok irányában egy körüljárási irányt választunk és ha c, d két j' -beli pont, a (c, d) ív alatt j' -nek azon ívét értjük, melyen ez irányban lehet a c -ből a d -be jutni. Hasonlóan J' -nek a megfelelő C, D pontok által meghatározott ívei közül (CD) -vel jelöljük azt, mely a (cd) -nek felel meg. A kiegészítő ívek (dc) és (DC) .

Ha c, d egy összeeső pontpár a j' -ben, akkor meglehet, hogy a megfelelő J' -beli (CD) és (DC) ívek mindegyike, mint zárt görbe, átfogja a (bk) -t. Ezen $J^{(1)}$ és $J^{(2)}$ görbék mindegyikén esetleg ismét akad az előbbi C, D -hez hasonló pontpár, úgy, hogy a származó $J^{(11)}, J^{(12)}, J^{(21)}, J^{(22)}$ zárt görbék mindegyike ismét átfogja a (b, k) -t.

Ezen

$$J'; J^{(1)}, J^{(2)}; J^{(11)}, J^{(12)}, J^{(21)}, J^{(22)}; J^{(111)}, \dots$$

sorozat azonban nem folytatódhatik vég nélkül úgy, hogy bármely görbe e sorozatból átfogná a (b, k) -t és belőle egy C, D -hez hasonló pontpárral ismét támadna két görbe, melyek szintén a sorozat tagjai és átfogják a (b, k) -t. Mert legalább egy

$$J', J^{(1)}, J^{(11)}, J^{(111)}, \dots\text{-féle}$$

olyan sorozat létezik az előbbi sorozatban, amelynek görbéi fokozatosan egymásból származnak és kiterjedésök 0-ig csökken. Egy ily sorozat torlódási pontja a (bk) poligon pontja volna (5. §.), ami nem lehetséges.

El kell jutnunk tehát az előbbi sorozatban egy oly J'' zárt görbéig, amely szintén átfogja a (b, k) -t, de úgy, hogy ha van rajta egy C, D pontpár, amely egy j' -beli összeeső pontpárnak felel meg, akkor a J'' -beli (CD) és (DC) ívek, mint zárt görbék közül legalább az egyik át nem fogja a (b, k) -t. Ugyanekkor

azután a másik átfogja, mert ha mindkettő át nem fogná, mindkettő külön-külön a $C \equiv D$ közös pontba volna összehúzható ennek fix helyzete mellett a (b, k) érintése nélkül (7. §.) úgy, hogy így maga J'' is egy pontba volna összehúzható, azaz át nem fogná (b, k) -t. J'' -t jelöljük ismét J' -vel, az eredeti I_0, I_1, \dots -ből benne maradt görbedarabokat I_0, I_1, \dots -el, végpontjaikat R_0, R_1, \dots -el és számukat n -el. J' ismét a j' kör képének tekinthető az előbbi értelemben.

A j' kör i_0 ívén legyen M mindazon m'_1 pontok halmaza, amelyeknek a többi i_1, i_2, \dots, i_{n-1} ívekben egy-egy oly n'_1 összeeső ponttársa van, hogy az $(m'_1 n'_1)$ ívnek megfelelő zárt görbe a (b, k) -t át nem fogja. Ha átfogja, akkor egy ily m'_1 nem tartozik az M -be.

Ezen M halmaznak van egy legalsó (azaz r_0 -hoz legközelebb levő) m_1 pontja. Mert legyen $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 \dots$ egy oly sorozat az M -ben, mely M -nek a legalsó torlódási pontja felé tart, melyet m_1 -el jelölünk. Feltehető, hogy a μ_1, μ_2, \dots pontoknak az n'_1 pontok közt levő megfelelő ν_1, ν_2, \dots pontjai egyetlen n_1 pontban torlódnak, mert a μ_1, μ_2, \dots közül kiválasztható ilyen sorozat. m_1 és n_1 összeeső pontok és az $(m_1 n_1)$ ív görbéje az összes $(m'_1 n'_1)$ ívek görbéihez hasonlóan szintén át nem fogja a (b, k) -t. Mert ha $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \dots$, vagy legalább a ν pontok közül kiválasztható ily sorozat, akkor elég nagy ρ mellett az $(m_1 \mu_\rho)$ és $(\nu_\rho n_1)$ ívek zárt görbéje egy kicsiny gömb belsejében a (b, k) érintése nélkül a μ_ρ és ν_ρ pontok közös megfelelő pontjába húzható össze ezen pont fix helyzete mellett, úgy, hogy ezáltal az $(m_1 n_1)$ ív görbéje az $(\mu_\rho \nu_\rho)$ ív görbéjébe deformálódik, s mivel ez utóbbi át nem fogja, azért az első sem fogja át a (b, k) -t.

Ha pedig $\nu_1 > \nu_2 > \nu_3 \dots$, vagy a ν pontok közül csak ilyen sorozat választható ki, akkor elég nagy ρ mellett ismét egy kicsiny gömb belsejében a (b, k) érintése nélkül deformálható az $(m_1 \mu_\rho)$ ív nyílt görbéje a végpontok fix helyzete mellett $(n_1 \nu_\rho)$ görbéjébe.

Ezáltal az $(m_1 n_1)$ ív görbéjébe ismét a $(\mu_\rho \nu_\rho)$ ív görbéjébe deformálódik és így át nem fogja a (b, k) -t.

Jelentse n_1 az m_1 -el ily módon összeeső, véges számú n_1

pont közül a legutolsót. Kicsiny δ és ε' mellett az n_1 nem lehet azonos r_0 -al. Ha az i_0 ívben az M halmaznak egy pontja sincs, akkor m_1 az r_1 -el legyen azonos és n_1 az m_1 -el összeeső mindazon n'_1 pontok közül a legmagasabb, melyek mellett az $(m_1 n'_1)$ ív görbéje át nem fogja a (b, k) -t. Ha egy ily n'_1 pont sem létezik, akkor n_1 is az r_1 -el legyen azonos.

Az n_1 utáni legelső, n_1 -től különböző osztáspont legyen r_v . Mindazon m'_2 pontok halmaza az $(n_1 r_v)$ ívben, melyeknek van egy-egy n'_2 összeeső ponttársuk j' -nek a $(n_1 r_v)$ íven kívül levő részében (leszámitva e külső részből az $(m_1 n_1)$ ív belső pontjait), bir hasonlóan egy legelső m_2 ponttal, mely n_1 -től különböző, de r_v -vel azonos is lehet, — ha csak azon m'_2, n'_2 pontpárokat számítjuk is, amelyek $(m'_2 n'_2)$ ívének görbéje át nem fogja a (b, k) -t. Az m_2 -vel összeeső n'_2 -féle pontok közül az utolsó legyen n_2 , mely r_v -vel is lehet azonos, ha m_2 is az. Az $(m_2 n_2)$ ív görbéje szintén át nem fogja a (b, k) -t.

Ha r_ϱ az n_2 utáni legelső, tőle különböző osztáspont, akkor az $(n_2 r_\varrho)$ ívben és azután is úgy folytatjuk ezen eljárást, mint előbb az $(n_1 r_v)$ ívben és úgy, hogy az egyszer már kijelölt $(m_1 n_1), (m_2 n_2), \dots$ ívek belső pontjait nem vesszük többé tekintetbe a pontok összeesésénél. Megeshetik, hogy ezen ívek közül valamelyik egy előtte levőt egészen magába zár. Ekkor az utóbbit nem tartjuk számon külön többé.

Végesszámú lépés után a j' fennmaradó

$$(n_1 m_2), (n_2 m_3), \dots (n_s m_1)$$

íveinek megfelelő pontok együtt egy zárt J görbét adnak, mert két-két szomszédos ív egymás felé eső végpontjai összeeső pontok. J is átfogja a (bk) -t, mert ha az

$$(m_1 n_1), (m_2 n_2), \dots (m_s n_s)$$

ívek görbéit, mint át nem fogó görbéket egyenként az egyes ívek összeeső végpontjainak megfelelő J' -beli pontba húzzuk össze, ezáltal az átfogó J' görbét az J -be deformáljuk és e deformáció a (b, k) érintése nélkül történhetik. J -ben továbbá nem

létezhetnek összeeső pontok. Egy összeeső c, d pontpárnak mindkét pontja nem lehet az

$$(n_1 m_2), (n_2 m_3), \dots (n_s m_1)$$

íveknek csupán egyikében, mert ezen íveknek megfelelő J' -beli pontok az I_0, I_1, \dots, I_{n-1} , JORDAN-görbék egyes darabjai. A c, d összeeső pontpár ezen ívek közül csak két különbözőben lehetne, anélkül, hogy az

$$m_1, n_1; m_2, n_2; \dots m_s, n_s$$

pontpárok közül való volna. Ez pedig ezen pontpárok tulajdonságai miatt szintén nem lehetséges, mert a (cd) és (dc) ívek görbéi közül az egyik, pl. a (cd) át nem fogná a (b, k) -t és (cd) belsejében kellene lennie ezen pontpárok ívei közül legalább egy (m_v, n_v) ívnek. Ha a (cd) -ben levő ily ívek közül (m_v, n_v) a legelsőt jelenti, az m_v és n_v pontok közül legalább egy a (cd) ív belső pontjai közül való lenne, azaz nem m_v és n_v lennének az m'_v és n'_v pontthalmazok szélső határpontjai.

J tehát zárt JORDAN-görbe.

Később kimutatjuk, hogy ha egy H -beli zárt J JORDAN-görbe egy (b, k) poligont átfog, akkor viszont ez is átfogja az J -t.

13. §.

Minden H -beli zárt J JORDAN-görbe a H -nak rajta kívül levő pontjait két részre, H_1 és H_2 -re osztja, úgy, hogy a H_1 (vagy H_2) bármely két pontja az J érintése nélkül köthető össze egy H -beli JORDAN-görbével, míg bármely JORDAN-görbe, mely H_1 -nek egy pontját a H_2 egy pontjával köti össze a H -ban tartalmazza az J -nek legalább egy pontját.

A H -nak két J -n kívüli P, Q pontját az J -től el nem választottnak tekintjük, ha összeköthetők az J érintése nélkül egy H -beli JORDAN-görbével; ellenkező esetben az J elválasztja a P, Q pontokat. Hasonlóan értjük az elválasztást bármely más H -beli halmazra is. A H mindazon pontjainak halmazát, melyeket az J egy rajta kívül levő R ponttól el nem választ,

$H(R)$ -el jelöljük. A H -nak az R elegendő kis környezetében levő valamennyi pontja a $H(R)$ -be tartozik. $H(R)$ határának nevezzük és $J(R)$ -el jelöljük az J mindazon pontjainak halmazát, melyek egy $H(R)$ -beli R', R'', \dots pontsorozatnak a torlódási pontjai.

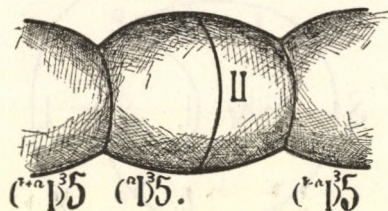
$J(R)$ zárt halmaz. Ha J elválasztja a P, Q pontokat, minden e két pontot összekötő H -beli JORDAN-görbe az $J(P)$ és $J(Q)$ -ből is tartalmaz pontokat, tehát ezek is elválasztják P és Q -t.

1. A H -nak bármely I nyílt JORDAN-görbéje gömbtípusú $G_\varepsilon(I)$ poliedrális felülettel közelíthető meg, Azaz minden $F_\varepsilon(I)$ közelítő felület szétmetszésekkel gömbtípusúvá változtatható. Kicsiny deformációkkal elérhető, hogy $F_\varepsilon(I)$ -nek többszörös pontjai és vonalai nincsenek. Ha $F_\varepsilon(I)$ összefüggési rendszáma a gömbénél magasabb, akkor létezik rajta egy Π zárt poligon, amelyen át az $F_\varepsilon(I)$ belsejében egy L lap fektethető át úgy, hogy ennek mentén való felmetszéssel az összefüggési rendszám egygyel alacsonyabb lesz.

E Π át nem foghatja az I -t. Mert I önmagában egy ponttá húzható össze; tehát a H -nak egy rajta kívül levő pontpárját sem választhatja el (11. §. 4.). Π -nek a H -val közös pontjai egy zárt M halmazt alkotnak. Az M -en kívül levő íveit Π -nek jelöljük a_1, a_2, \dots -vel. Ezeknek kiterjedése 0-ig csökken, úgyhogy végpontjaik: $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots$ az I -t nem érintő és 0-ig csökkenő kiterjedésű I_1, I_2, \dots JORDAN-görbékkel köthetők össze a H -ban. Az a_1, a_2, \dots ívek 0-ig csökkenő sugarú gömbök belsejében deformálhatók végpontjaik fix helyzete mellett egyenként az I érintése nélkül az I_1, I_2, \dots görbékbe. Ezáltal a Π poligon egy H -beli J zárt görbébe deformálódik, mely az M halmaz pontjaiból és az I_1, I_2, \dots görbékéből áll. J az I érintése nélkül húzható össze a B vagy K egy pontjába, tehát vele együtt Π sem fogja át I -t.

A Π -n át az $F_\varepsilon(I)$ belsejében tehát egy I -t nem metsző L_1 lap is fektethető és ennek mentén való szétmetszéssel az $F_\varepsilon(I)$ összefüggési rendszáma egygyel csökken. Végesszámú ismétlés után $F_\varepsilon(I)$ gömbtípusú $G_\varepsilon(I)$ -vé válik.

2. Az J zárt JORDAN-görbe a H -t legalább két részre választja szét. J -t az $R_0, R_1, \dots, R_n \equiv R_0$ pontokkal az $I_v \equiv (R_v, R_{v+1})$ nyílt JORDAN-görbékre osztjuk fel. Kicsiny ε mellett a $G_\varepsilon(I_v)$ összes felületek közül, két-két szomszédost kivéve, bármely kettő egymáson kívül van. A $G_\varepsilon(I_v)$ testek lánczát az J egyszer járja körül, azaz elég nagy ρ mellett az J -n választott $P'_0, P'_1, \dots, P'_q \equiv P'_0$ pontok által meghatározott $\Pi' \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{q-1})$, zárt poligon, ha két-két szomszédos P'_v, P'_{v+1} pont távolsága, λ_v adott kicsiny szám, e láncz belsejében van és azt egyszer körüljárja. A $G_\varepsilon(I_v)$ felületét a $G_\varepsilon(I_{v-1})$ és $G_\varepsilon(I_{v+1})$ közt körüljáró zárt Π poligon (6. ábra) átfogja az J -t, mert ha át nem fogná, a $G_\varepsilon(I_v)$ testek belsejében egy L lap volna átfektethető rajta és ezt elég nagy ρ mellett a Π' poligon sem metszené, úgyhogy körül nem



6. ábra.

járná a láncz belsejét. Jelöljük a Π -n levő H -beli pontok zárt halmazát M -el, Π -nek az M -en kívüli íveit a_1, a_2, \dots -vel, ezek végpontjait $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots$ -vel. Ezek között kell léteznie legalább egy, J -től elválasztott pontpárnak, mert ellenkező esetben a Π az előbbihez hasonló módon egy H -beli zárt J' görbébe volna deformálható az J érintése nélkül, azáltal, hogy az a_v íveket a P_v, Q_v pontpárokat összekötő és 0-ig csökkenő kiterjedésű $I_v^{(0)}$ görbékbe deformáljuk. J' pedig egy ponttá húzható össze az J érintése nélkül.

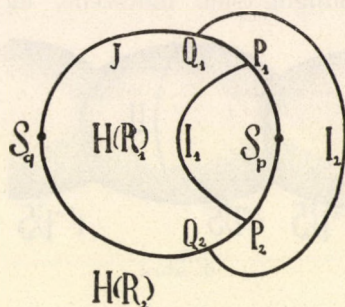
3. Bármely $H(R)$ határa $J(R)$ azonos az egész J -vel és azon pontjai J -nek, melyek a $H(R)$ egy pontjából egy $H(R)$ -ben levő JORDAN-görbével érhetők el, az J -n mindenütt sűrű halmazt alkotnak.

Mert ha I_1 az J -nek bármily kicsiny íve, R egy tőle elvá-

lasztott R' ponttal oly I' JORDAN-görbe által köthető össze, mely nem metszi az I_1 kiegészítő ívét, I_2 -t, egy pontban sem, mert a nyílt H -beli JORDAN-görbe a H -nak egy pontpárját sem választja el. Mivel I' -nek az J -t metszenie kell, azért az I_1 -et metszi csupán. I_1 -nek az I' -n R -ből elérhető legelső pontja tehát $J(R)$ -hez tartozik és R -ből egy $H(R)$ -beli JORDAN-görbével érhető el.

Ha R -t az J két pontjával kötik össze ily görbékkel, ezekből kiválasztható egy JORDAN-görbe, mely a két pontot a $H(R)$ belsejében köti össze.

4. Az J legfeljebb két részre osztja a H -t. Azaz ha R_1, R_2, \dots oly ponthalmaz a H -ban, amelynek bármely két pontját az J



7. ábra.

elválasztja és a H -nak J -n kívüli bármely pontja a $H(R_1), H(R_2), \dots$ halmazok egyikében előfordul, akkor e halmazok száma legfeljebb kettő lehet. Legyen (P_1Q_1) és (P_2Q_2) az J -nek két egymáson kívül levő kicsiny íve. (A 7. ábrában jelentse az J -n belül levő terület a $H(R_1)$ -et, a külső a $H(R_2)$ -t). A $H(R_1)$ -ben kössük össze a (P_1Q_1) valamely belső pontját egy I_1 görbével a (P_2Q_2) valamely belső pontjával. Hasonló legyen az I_2 görbe a $H(R_2)$ -ben. Jelentse P_1, Q_1, P_2, Q_2 már ezen görbék végpontjait, úgy, hogy (P_1Q_1) és (P_2Q_2) a végpontok közé eső kicsiny ívek. Ha $H(R_1), H(R_2)$ -n kívül még léteznek a $H(R_3), H(R_4), \dots$ halmazok is, akkor az J -nek a (P_1P_2) ívén levő bármely S_p és a (Q_1Q_2) ívén levő bármely S_q pontja egy harma-

dik $H(R_3)$ halmazon áthaladó H -beli JORDAN-görbével köthető össze az $[I_1, I_2, (P_1Q_1), (P_2Q_2)]$ görbékéből összeállított J_1 zárt JORDAN-görbe érintése nélkül, mert S_p és S_q tetszésszerű pontok közelében léteznek a $H(R_3)$ -ból elérhető pontok. Az S_p és S_q pontok közvetítésével a $H(R_3), H(R_4), \dots$ összes belső pontjai is összeköthetők egymással az J_1 érintése nélkül, sőt a $H(R_1)$ és $H(R_2)$ -nek I_1 és I_2 -n kívül levő bármely R'_1 és R'_2 pontjaival is és ezen pontok is egymás közt. Mert R'_1 az I_1 és $(P_1Q_1), (P_2Q_2)$ -ből álló nyílt JORDAN-görbe érintése nélkül köthető össze az R_3 -al egy görbe által s ezen az R'_1 -ből legelsőnek elérhető J -beli pont csak a (P_1P_2) és (Q_1Q_2) ívek valamely belső pontja lehet, tehát ez ívek belsejében az S_p és S_q pontok valamelyikével köthető össze. A H -nak az J_1 -n kívül levő összes pontjai tehát az J_1 érintése nélkül köthetők össze egymással, azaz nem léteznek a H -ban J_1 -től elválasztott pontpárok, ami lehetetlen.

J tehát két részre, H_1 és H_2 -re osztja a H -t. Ha J a H -nak két P, Q pontját el nem választja, akkor nemcsak az ezekhez tartozó (b, k) poligon át nem fogja az J -t, hanem ez sem fogja át a (b, k) -t. Mert ha mindkét pont a H_2 -ben van, egy $F_\varepsilon(H_1, J)$ közelítő felületen, mely a H_1 és az J pontjaiból álló halmazt közelíti meg, kívül van a (b, k) poligon minden pontja. Feltehetjük, hogy e felületnek többszörös pontjai vagy vonalai nincsenek. E felületen levő egyetlen Π poligon sem foghatja át a H_1 és J pontjaiból álló halmazt, mert a Π csak a H_2 -ből tartalmazhat pontokat, melyek egy zárt M halmazt alkotnak. Π -nek minden pontja a J -től véges távolságra van, az M -en kívüli a_1, a_2, \dots 0-ig csökkenő kiterjedésű ívei tehát 0-ig csökkenő sugarú gömbök belsejében az J érintése nélkül deformálhatók a végpontjaikat a H_2 -ben összekötő és 0-ig csökkenő kiterjedésű I_1, I_2, \dots JORDAN-görbékbe. Ezáltal Π egy H_2 -beli zárt görbébe deformálódik, amely egy ponttá húzható össze az J érintése nélkül. $F_\varepsilon(H_1, J)$ tehát szétmetszésekkel gömbtípusúvá változtatható és J e gömbtípusú felület belsejében lévén, át nem fogja a (b, k) poligont. Viszont, ha J át nem fogja a (b, k) -t, ez

sem fogja át J -t. A (bk) poligon és az J görbe egyszerre át-fogják, vagy át nem fogják egymást.

A H -ban választunk egy P_∞ pontot és minden H -beli zárt JORDAN-görbe belseje alatt a hozzá tartozó H_1 és H_2 részek közül azt értjük, melyben nincs a P_∞ pont. A másik rész a külső rész. Ez a definíció nem vonatkozhatik oly görbékre, melyek átmennek a P_∞ ponton.

14. §.

Ha J_1, \dots, J_2 olyan 0-ig csökkenő kiterjedésű zárt JORDAN-görbék sorozata a H -ban, melyek át nem mennek a P_∞ ponton és nem is torlódnak benne, akkor a H hozzájuk tartozó belső részeinek kiterjedése is 0-ig csökken.

Feltehetjük, hogy az J_1, J_2, \dots görbék a H -nak egyetlen R pontjában torlódnak. Ha a belső részek kiterjedése nem csökken 0-ig, akkor található az J_1 -n belül egy P_1 , az J_2 -n belül egy P_2 pont. stb., úgy, hogy bármely P_r az R -től egy véges r -nél nagyobb távolságra van.¹ Az J_1, J_2, \dots sorozatból kiválaszthatók oly görbék, amelyeknek ezen P_r pontjai a H -nak egyetlen P pontjában torlódnak. Jelöljük ezeket és a hozzájuk tartozó P_r pontokat ismét $J_1, J_2, \dots, P_1, P_2, \dots$ -vel. P és R távolsága nem lehet kisebb r -nél. Létezik egy elég nagy n szám, amelyen túl az összes J_{n+1}, J_{n+2}, \dots görbék az R körül írt ε sugarú G_r gömbön belül és P_{n+1}, P_{n+2}, \dots a P körül írt ε sugarú G_p gömbön belül vannak, továbbá a $(P_{n+1}P), (P_{n+2}P), \dots$ pontpárok a G_p belsejében köthetők össze a $(\beta_1 x_1), (\beta_2 x_2), \dots$ 0-ig csökkenő kiterjedésű zárt poligonokkal. Kicsiny ε mellett a G_p és G_r gömbök egymáson kívül vannak. A $(\beta_r x_r)$ poligonok egyike sem foghatja át a megfelelő J_{n+r} görbét, mert gömbfelület választja el őket. P tehát valamennyi J_{n+1}, J_{n+2}, \dots görbén belül van, azaz ezen görbék bármelyike

¹ Vagy legalább is kiválaszthatók ily görbék az eredeti sorozatból. A kiválasztott görbéket ekkor ismét J_1, J_2, \dots -vel jelöljük.

és a H -nak P, P_∞ pontjaihoz tartozó (b, k) poligon kölcsönösen átfogják egymást, úgy, hogy az J , görbék torlódáspontja R is a (b, k) poligonon van (5. §.). Ez azonban nem lehetséges, mert R a P_∞ -től és P -től különböző pont, a (b, k) poligon pedig H -nak csupán ezen két pontját tartalmazza.

Tételünk érvényes marad, ha P_∞ -t a H más pontjába helyezzük is át. Tehát bármily kicsiny δ -hoz található oly kicsiny ε , hogy minden H -beli zárt JORDAN-görbe, mely egy ε sugarú gömbbe zárható, belsejével együtt egy δ sugarú gömbbe zárható be, — ha általánosabb értelemben a P_∞ körül bizonyos kicsiny ε_1 sugárral írott gömb belsejében levő zárt JORDAN-görbék belseje alatt a H -nak hozzájuk tartozó H_1 és H_2 része közül azt értjük, mely nem a P_∞ -re, hanem egy ezen gömbön kívül levő P'_∞ -re nézve belső rész.

Közönségesen azonban az összes, P_∞ -en kívüli görbék belső és külső részét csak a P_∞ -re vonatkoztatjuk.

15. §.

Ha két H -beli zárt JORDAN-görbének, J és J_1 -nek egy közös pontja sincs, akkor közülük bármelyik a másiknak egészen a belsejébe vagy külsejébe esik. (Feltesszük itt is, ezután is, hogy P_∞ nincs a görbék egyikén sem.) Ha J_1 az J -n belül van, akkor viszont J az J_1 külső részébe esik. Mert a P_∞ -t az J_1 valamely R pontjával egy I görbével kössük össze, mely egészen az J_1 külső részében van. R az J -n belül, P_∞ rajta kívül van, tehát I legalább begy pontban metszi az J -t, ami lehetetlen volna, ha J az J_1 belsejében lenne.

Ha J_1 az J belsejében van, akkor J_1 minden belső pontja belső pontja J -nek is. Mert ha J_1 -nek egy belső P pontja az J -n kívül volna, P -t össze lehetne kötni az J valamely R pontjával egy oly I görbével, mely egészen J külső részébe esik. J_1 -re nézve azonban P belső és R külső pont. Az I tehát metszené az J_1 -et, ami lehetetlen, mert J_1 minden pontja az J -re nézve belső pont.

Ha az J -nek két R, R' pontját az J belsejében egy I_0 JORDAN-görbével kötjük össze és I_1, I_2 az J -nek az R, R' pontok által meghatározott íveit jelentik, akkor J -nek minden belső S pontja belső pontja az $J_1 \equiv (I_0 I_1)$ és $J_2 \equiv (I_0 I_2)$ zárt JORDAN-görbék egyikének. Mert ha az S és P_∞ pontokhoz tartozó (b, k) poligon az J_1, J_2 görbék egyikét sem fogná át, ezek egy-egy gömbtípusú felülettel volnának elkülöníthetők tőle és ezek belsejében J_1 és J_2 is, végpontjainak fix helyzete mellett, az I_0 -ba volna deformálható, amely önmagában egy ponttá húzható össze, azaz J sem fogná át (b, k) -t.

I_1 minden belső pontja az J_2 -n kívül, s hasonlóan I_2 minden belső pontja az J_1 -en kívül van. Ha I_1 -nek egy V belső pontja az J_2 -n belül volna, ugyanitt volna bármely más belső X pontja is, mert e két pont I_1 -nek a (VX) ívével köthető össze az J_2 érintése nélkül. Azaz ekkor I_1 egészen az J_2 -n belül volna és P_∞ össze volna köthető az I_0 valamely R_0 pontjával egy I görbével, mely egészen az J_2 -n kívül van. J -re nézve P_∞ külső, R_0 belső pont, I tehát metszené J -t, s mivel ennek J_2 -n belül levő I_1 ívét nem metszheti, az I_2 -t metszené, ami nem lehetséges, mert I az J_2 -nek egyedül az R_0 pontját tartalmazza.

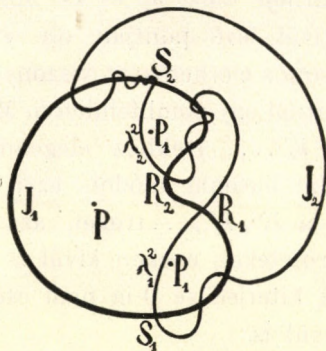
Az J_1 és J_2 görbék bármely belső pontja belső pontja J -nek is. Mert ha J_1 -nek egy belső P pontja az J -n kívül volna, össze volna köthető az I_2 valamely R_2 pontjával oly I görbével, mely egészen az J -n kívül van. J_1 -re nézve P belső és R_2 külső pont, I tehát metszené az J_1 -et s mivel ennek az J -hez tartozó I_1 ívét nem metszheti, az I_0 -t metszené. Ennek azonban minden pontja J -n belül van.

J_1 és J_2 -nek közös belső pontja sem lehet. J_1 -nek az I_1 egy belső R_1 pontja elegendő közelében mindenesetre van egy P_1 belső pontja, mely az J_2 -n kívül van, mert maga R_1 is külső pont J_2 -re nézve. J_1 bármely más P belső pontját kössük az J_1 belsejében a P_1 ponttal egy I görbével. I nem metszi J_2 -nek J_1 -el közös I_0 ívét és az J_1 -en kívül levő I_2 ívét sem, azaz az egész J_2 -t sem, úgy, hogy P is J_1 -n kívül van.

Hasonló tételek érvényesek az J külső részére is.

Mindazon törvények tehát, melyek a gömbfelületen a véges számú poligonvonalból vagy JORDAN-görbéből álló hálózatokra és a hálózat által létesített területekre érvényesek, a H -ban is teljesülnek.

Ha J_1 és J_2 két tetszőszerinti zárt JORDAN-görbe a H -ban akkor a H mindazon pontjainak határhalmaza, melyek a H -nak egy J_1 és J_2 -n nem levő P pontjával az J_1 és J_2 érintése nélkül köthetők össze egy JORDAN-görbével a H -ban, egy zárt JORDAN-görbe, melynek pontjai az J_1 és J_2 pontjai közül valók. Legyen



8. ábra.

P az J_1 -n belül. J_2 -nek bármely $\lambda_v^{(2)}$ íve, mely az J_1 -en belül van, $R_v S_v$ végpontjaival az J_1 -nek két ívét határozza meg s ezek közül azt, mely a P -ból az J_2 metszése nélkül el nem érhető, jelentse $\lambda_v^{(1)}$. A $\lambda_v^{(1)}$ -k általában egymást átfedik s bármelyik egy másikon vagy egészen belül, vagy kívül van. Ezen 0-ig csökkenő $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots$ sorozatban hagyjuk el mindazon íveket, melyek egy másikon belül vannak. Bármelyik csak véges számú ívnek a belsejében lehet. A megmaradtak mind egymáson kívül vannak, vagy csak egy pontban érintkeznek. Jelöljük ezeket ismét $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots$ -el, a hozzájuk tartozó $\lambda^{(2)}$ -ket $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots$ -vel és végpontjaikat $R_1 S_1, R_2 S_2, \dots$ -vel (8. ábra). Ha az J_1 belső pontjaiból az $J^{(1)} \equiv (\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}), J^{(2)} \equiv (\lambda_2^{(1)}, \lambda_2^{(2)}), \dots$ egymáson kívül levő és 0-ig csökkenő kiterjedésű zárt JORDAN-görbék belső

pontjait elhagyjuk, J_1 belsejének bármely megmaradt P' pontja, mely nincs az J_2 -n, azon J_p JORDAN-görbén belül van, melyet az J_1 -ből úgy nyerünk, ha ennek a $\lambda_v^{(1)}$ íveit a megfelelő $\lambda^{(2)}$ ívekkel helyettesítjük. Mert a $P'P_\infty$ pontokhoz tartozó (b, k) poligon érintése nélkül deformálhatók 0-ig csökkenő gömbtípusú testek belsejében a $\lambda_v^{(1)}$ ívek a $\lambda_v^{(2)}$ ívekbe végpontjaik fix helyzete mellett, úgyhogy J_1 -el együtt J_p is átfogja a (bk) poligont. Hasonlóan J_p bármely belső pontja az J_1 -n is belül van és J_p -nek nem lehet közös belső pontja az $J^{(v)}$ görbék egyikével sem. A P -ből az J_1 és J_2 érintése nélkül elérhető pontok halmazának a határgörbéje tehát J_p és két JORDAN-görbe hálózata a H -nak rajta kívül levő pontjait oly «területekre» osztja, amelyeknek a kölcsönös elérhetőségi viszonyai ép olyanok, mint egy hasonló hálózathálózaton egy gömbfelületen. Mert az $J^{(1)}, J^{(2)}, \dots$ belsejében a $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots$ ívekhez elegendő közel választott P_1, P_2, \dots pontokkal hasonló módon ezen görbék belsejében határozhatjuk meg a $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots$ íveket, azaz a P_1, P_2, \dots felől elérhető H -beli területeket, ezeken kívül ismét vég nélkül, míg az összes területek kiterjedése 0-ig nem csökken. Ugyanez végezhető az J_1 -n kívül is.

Ha egy harmadik zárt JORDAN-görbét is számba veszünk a felületen, ez az előbbi két görbe hálózata által létesített területek mindegyikében és így az egész H -ban is olyan további területeket metsz ki, melyek kölcsönös elérhetőségi viszonyai hasonlóak a gömbfelületen levő hasonló hálózathoz. Ugyanez áll véges számú JORDAN-görbére is.

Az eddigiekből az is következik, hogy egy zárt J_1 JORDAN-görbe mindazon pontjai, melyek a belsejéből (vagy külsejéből) egy JORDAN-görbével elérhetők, nemcsak mindenütt sűrű halmazt alkotnak, hanem e halmaz azonos az egész görbével. Legyen R az J_1 bármely pontja. R körül egy kicsiny ε sugarú gömbbe zárható J_2 szerkeszthető, mely az R és P pontokat — ha P az J_1 egy belső pontja — elválasztja (12. §.). R a P által meghatározott $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots$ ívek valamelyikén lehet csupán, mert ha az J_p -n lenne, ennek a belső P pontjából egy JORDAN-

görbével volna elérhető, mely egészen az J_p belsejében van és így nem metszi J_2 -t sem, holott ez elválasztja a két pontot. Létezik tehát egy $\lambda_q^{(2)}$ ív, mely a $\lambda_q^{(1)}$ -n levő R -t a P -től elválasztja. Tehát az R körül írt és 0-ig csökkenő ε , sugarú $G_{\varepsilon_1}, G_{\varepsilon_2}, \dots$ gömbök mindegyikében található egy-egy $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ív az J_1 belsejében, mely az R -t P -től elválasztja. Ezen ívek végpontjai legyenek P_1Q_1, P_2Q_2, \dots és J_1 -nek a közéjük eső kicsiny ívei $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$. Feltehető, hogy ezen ívek fokozatosan egymáson belül vannak. Mindegyiken létezik egy-egy, P felől elérhető K_v belső pont. A P és K_v pontokat összekötő I_v görbe metszi a λ_v -t és az előtte levő összes λ_q íveket. Ha tehát a P felől az I_1 -n haladunk a λ_1 -ig, azután ezen az I_2 -ig, ez utóbbin a λ_3 -ig, stb., a bejárt folytonos görbéből kiválasztható egy JORDAN-görbe, mely az R és P pontokat köti össze az J_1 belsejében.

16. §.

A H halmaz egy G gömb felületére kölcsönös egyértékű és folytonos módon leképezhető.

A H minden P pontja körül létezik egy $\varepsilon^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható zárt JORDAN-görbe, mely e pontot a P_∞ -től elválasztja, P_∞ körül külön írunk egy $\varepsilon^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható zárt JORDAN-görbét s ezen görbe belsejének a P_∞ -felőli oldalát nevezzük. Mivel bármely P elegendő kis környezetében csak olyan H -beli pontok léteznek, melyeket e P -től a hozzátartozó JORDAN-görbe nem választ el, azért BOREL tétele szerint kiválasztható e JORDAN-görbék közül véges számú $J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \dots, J_n^{(1)}$ görbe úgy, hogy a H bármely pontja ezek közül legalább egynek a belsejében van.

Kicsiny $\varepsilon^{(1)}$ mellett e görbék mindegyike a belsejével együtt egy adott kicsiny $\delta^{(1)}$ sugarú gömb belsejébe zárható.

A H leképezését egy G gömbre úgy végezzük, hogy előbb ezen $J_v^{(1)}$ JORDAN-görbék hálózatát képezzük le a G -re.

$J_1^{(1)}$ -t a G -nek egy $j_1^{(1)}$ zárt és többszörös pontok nélküli po-

lignonjára képezzük le. E poligon egyik oldalát vesszük a belseje gyanánt.

$J_1^{(1)}$ egy belső és $J_2^{(1)}$ -n kívüli P pontja (9. ábra) meghatározza az egymást nem metsző $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots$ íveket az $J_2^{(1)}$ -n. Hasonló 0-ig csökkenő kiterjedésű és egymáson kívül levő poligoníveket húzunk a $j_1^{(1)}$ belsejében a megfelelő végpontok közt és ezekre képezzük le a $\lambda^{(2)}$ íveket. Azután a P_1, P_2, \dots pontokból (9. ábra) elérhető $J_2^{(1)}$ -beli íveket s hasonlóan a továbbiakat és az $J_1^{(1)}$ -en kívül levőket is a G -n megfelelően húzott poligonívekre képezzük le. Az $J_1^{(1)}$ és $J_2^{(1)}$ görbék $J_{12}^{(1)}$ hálózataként ily módon egy $j_{12}^{(1)}$ hálózat felel meg s ezek egymásnak kölcsönös egyértékű és folytonos módon felelnek meg. Az $J_{12}^{(1)}$ által meghatározott H -beli területek mindegyikének egy-egy G -beli terület felel meg, egymásnak kölcsönös egyértékű és folytonos módon megfelelő határvonalakkal. Továbbá 0-ig csökkenő kiterjedésű $J_{12}^{(1)}$ -beli görbéknek és általa meghatározott területeknek hasonló görbék és területek felelnek meg a G -n és pedig egymáson kívül levő területeknek egymáson kívül levő területek. E viszony kölcsönös. Azonkívül egy H -beli területsorozat torlódási pontjai az $J_{12}^{(1)}$ -en a megfelelő területek torlódási pontjainak felelnek meg.

Ha ezután az $J_{12}^{(1)}$ hálózat minden területében levő $J_3^{(1)}$ -beli íveket képezzük le a G -beli megfelelő területekben hasonló módon húzott ívekre, akkor az $J_{123}^{(1)}$ és $j_{123}^{(1)}$ hálózatok és a többi görbék bevonásával nyert hálózatok is birnak mindazon tulajdonságokkal, melyekkel $J_{12}^{(1)}$ és $j_{12}^{(1)}$. A $J_{12\dots n}^{(1)}$ és $j_{12\dots n}^{(1)}$ hálózatokat $J^{(1)}$ - és $j^{(1)}$ -el jelöljük. Az $J^{(1)}$ hálózat minden területe, mint valamelyik $J_v^{(1)}$ görbe belsejének egy része, a határával együtt egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható. Ugyanez azonban nem áll esetleg a $j^{(1)}$ hálózatra is a G -n. De mindenesetre a $j^{(1)}$ hálózat mindazon területei, melyek nem zárhatók egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömb belsejébe, egy belsejükben húzott i poligonvonallal, mely a terület határpolygonjának két pontját köti össze a terület belsejében, úgy oszthatók két új területre s az új területek is, ha szükséges, úgy oszthatók szét egy-egy i_1 és i_2 poligonvonal-

lal s az új területek is, ha szükséges, az i_{11} , i_{12} , i_{21} , i_{22} poligonvonalakkal stb., hogy véges számú lépés után az osztás után fenmaradt területek mindegyike egy-egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható. A $j^{(1)}$ hálózat minden szétosztott területének megfelelő H -beli területek mindegyikét a megfelelő pontok közt húzott I görbével két részre osztjuk s I -t az i -re képezzük le. Az új területeket, ha G -beli megfelelő területeik még szét vannak osztva, az I_1, I_2 görbékkel szétosztjuk és ezeket az i_1, i_2 -re képezzük le, stb. Mindez elvégezhető, mert az $J^{(1)}$ és minden tovább nyert hálózat bármely területének határvonala egy-egy zárt JORDAN-görbe, ennek pedig minden pontja az összes belső pontokból elérhető. Bármiképp is történt a megfelelő területek belsejében a H -ban ezen új szétosztás, a véges számú lépés után nyert új hálózat is azzal a tulajdonsággal bír, hogy minden területe egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömb belsejébe zárható. E tulajdonsága megvan az új G -beli hálózatnak is, amellet, hogy mindkét hálózat az eredeti $J^{(1)}$ és $j^{(1)}$ hálózatok többi tulajdonságait is bírja. Az új hálózatokat ismét $J^{(1)}$ és $j^{(1)}$ -el jelöljük.

Ha a H -ban az eddigiehez hasonló módon olyan, belsejükkal együtt egy-egy $\delta^{(2)}$ sugarú gömbbe zárható zárt JORDAN-görbét határozzunk meg véges számban, hogy a H minden pontja ezek legalább egyikének belső pontja, az $J^{(1)}$ hálózatot ezen görbék fokozatos bevonása által oly $J^{(2)}$ hálózattá egészíthetjük ki s ezt egy G -beli $j^{(2)}$ hálózatra úgy képezhetjük le, hogy, esetleg csak az előbbihez hasonló szétosztással való módosítás után, ezen hálózatok is birnak a $J^{(1)}$ és $j^{(1)}$ hálózatok minden tulajdonságával, de területeik $\delta^{(2)}$ sugarú gömbökbe zárhatók.

Ezt vég nélkül folytatjuk 0-ig csökkenő $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots$ számokkal. Az $J^{(1)}, J^{(2)}, \dots$ hálózatok minden oly T_1, T_2, \dots terület-sorozata, melynél T_r az $J^{(r)}$ hálózat egy területe és T_{r+1} a T_r -n belül van, egyetlen R torlódási ponttal bír a H -ban. Ezen R -hez rendeljük a G -beli megfelelő t_1, t_2, \dots hasonló terület-sorozat egyetlen r torlódási pontját.

A leképezés a H és a G pontjai közt így kölcsönösen egyértékű. Egy G -beli pontnak nem felelhet meg két különböző

pont a H -ban, mert elég nagy ν mellett e két pont az $J^{(\nu)}$ hálózat két különböző területének belső vagy határpontja; ezeknek pedig különböző területek felelnek meg a G -ben. Hasonlóan a H egy pontjához is csak egy G -beli pont tartozik.

A leképezés továbbá folytonos is. Ha P_1, P_2, \dots egy pontsorozat a H -ban, melynek egyetlen torlódási pontja a P pont, akkor e sorozatból mindig kiválasztható egy P'_1, P'_2, \dots sorozat, a melynek G -beli megfelelő pontjai p'_1, p'_2, p'_3, \dots a G -ben a P megfelelő pontjában p -ben torlódnak. Mert ha létezik a hálózatok sorozatában egy $J^{(\nu)}$ hálózat, amelyben végtelen sok terület található: T_1, T_2, \dots , amelyek mindegyikében vagy a határán pontjai vannak a P_1, P_2, \dots sorozatnak, akkor P'_1 -t a T_1 -ből, P'_2 -t a T_2 -ből stb., választjuk ki s mivel T_1, T_2, \dots a P -ben torlódnak, azért megfelelő területeik t_1, t_2, \dots is a p -ben torlódnak és így a belsejükben vagy határukon levő p'_1, p'_2, \dots pontok is.

Ha pedig bármely $J^{(\nu)}$ -nek csak véges számú területében vagy ezek határán van a P_1, P_2, \dots sorozat, akkor $J^{(1)}$ -nél kiválasztható egy T_1 terület, melyben végtelen sok pontja van a sorozatnak. T_1 -en belül léteznie kell az $J^{(2)}$ területei közül legalább egy T_2 -nek, melyben szintén végtelen sok pontja van a sorozatnak, mert különben végtelen sok $J^{(2)}$ -beli terület létezne a T_1 -ben, amelyben pontjai vannak a sorozatnak. Így található a T_1, T_2, \dots területek sorozata, melyek fokenként egymáson belül fekszenek és a P -ben torlódnak. Ezeknek hasonló egymáson belül levő t_1, t_2, \dots területek felelnek meg a G -ben, melyek a p -ben torlódnak.

Ekkor P'_1 -t a T_1 -ben, a P'_2 -t a T_2 -ben, stb. választjuk ismét. A megfelelő p'_1, p'_2, \dots pontok a p -ben torlódnak.

Ebből következik az is, hogy nem létezhetik olyan P -ben torlódó H -beli P_1, P_2, \dots pontsorozat, a melynek megfelelő pontjai p_1, p_2, \dots egy p -től különböző pontban torlódnak. Mert ekkor nem volna kiválasztható belőle az előbbi P'_1, P'_2, \dots sorozat.

A leképezés tehát folytonos is és pedig a kölcsönös egyértékűség miatt kölcsönösen folytonos.

★

Mély hálával kell még megemlékeznem dr. RIESZ FRIGYES professzor úrról, a ki nemcsak felkeltette érdeklődésemet e probléma iránt, hanem később is jóakaró tanácsaival és útbaigazításaival támogatott e dolgozat elkészítésében.

Kaluzsay Károly.

VIZSGÁLATOK AZ ELEMI SZÁMELMÉLET KÖRÉBŐL.

III.

A policziklikus helyettesítésre vonatkozólag az előzőekben talált törvényszerűségek nem olyan természetűek, hogy általános érvényű képletet adnának a tetszőleges m -hez tartozó policziklikus helyettesítés rendszámára. Van azonban néhány speciális eset a mikor a rendszám törvénye explicit képlettel fejezhető ki; a következők ezen esetek felsorolását tartalmazzák.

1. $n = 2m + 1 = p$, a hol p törzsszám. Ha 2 a p -nek primitív gyöke, akkor, mint már tudjuk, a helyettesítés irreducibilis. Ha 2 nem primitív gyöke a p -nek, akkor valami δ kitevőhöz tartozik. Ha ez a δ páros szám, akkor szükségszerűleg

$$2^{\frac{\delta}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

a miből már következik, hogy a *policziklikus helyettesítés* $\frac{p-1}{\delta}$ számú egyforma $\frac{\delta}{2}$ elemszámú ciklusra bomlik fel, úgy hogy a helyettesítés rendszáma $\frac{\delta}{2}$.

2. $n = 2m + 1 = p^a$, a hol p olyan törzsszám, hogy 2 ennek primitív gyöke és $2^{p-1} - 1$ nem osztható p^2 -tel, úgy hogy ekkor, mint ismeretes, a 2 egyúttal primitív gyöke p minden hatványának is. Az n -nek minden osztója most $q = p^a$ alakú és mivel

$$\delta(q) = \varphi(q) = \varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$$

páros szám és szükségképen

$$2^{\frac{\delta(q)}{2}} \equiv -1 \pmod{q}$$

azért minden q osztó csak egy ciklust határoz meg, a mely $\frac{\delta(q)}{2}$ elemből áll. Most tehát összesen a ciklus lesz, melyeknek elemszámtörvényét az

$$l_a = \frac{p^a - p^{a-1}}{2} = p^{a-1} \frac{p-1}{2}, \quad (\alpha=1, 1, \dots, a)$$

képlet adja meg. A helyettesítés rendszáma, mint a ciklus elemszámok legkisebb közös többszöröse, most a legnagyobb ciklus elemszáma lesz, vagyis $p^{a-1} \frac{p-1}{2}$.

Ha nevezetesen $p=3$, akkor $\frac{p-1}{2} = 1$, és így $n = 3^a$ esetében a policiklikus helyettesítést alkotó ciklusok elemszámai $1, 3, 3^2, \dots, 3^{a-1}$, és a rendszám 3^{a-1} .

3. $n = 2m+1 = p^a$, a hol p olyan törzsszám, hogy 2 a páros δ kitevőhöz tartozik és $2^\delta - 1$ nem osztható p^2 -tel. A p osztónak az 1) miatt $\frac{p-1}{\delta}$ számú egyforma $\frac{\delta}{2}$ elemszámú ciklus felel meg. A 2 kitevője a p^a osztóra vonatkozólag könnyen beláthatólag $p^{a-1}\delta$. Ismeretes ugyanis az a tétel,¹ hogy ha $z^k - 1$ a p hatványai közül utóljára p^h -val osztható, akkor $z^{p^k} - 1$ utóljára p^{h+1} -el osztható; ebből és a p -re tett feltevésből következik, hogy a $2^{p^{a-1}\delta} - 1$ szám a p hatványai közül utóljára p^a -val osztható, úgy hogy

$$2^{p^{a-1}\delta} \equiv 1 \pmod{p^a}.$$

Ha a 2 kitevője $(\text{mod } p^a)$ $x\delta$ kisebb volna, mint $p^{a-1}\delta$, akkor kellene, hogy ez utóbbinak valamely osztója legyen, tehát az alakja $p^\beta\delta$ volna, a hol $\beta < a-1$, és kellene, hogy $2^{p^\beta\delta} - 1$ szám osztható legyen p^a -val, a mi az előrebocsátott tétel szerint lehetetlenség. Ennélfogva a 2 kitevője $\text{mod } p^a$ valóban $p^{a-1}\delta$. Így tehát a p^a osztónak $\frac{p-1}{\delta}$ számú $\frac{p^{a-1}\delta}{2}$ elemszámú

¹ Dr. PAUL BACHMANN: Niedere Zahlentheorie I. pag. 327.

ciklus fog megfelelni, úgy hogy a *helyettesítés rendszáma* $\frac{p^{a-1}\delta}{2}$.

4. $n = 2m+1 = p_1 p_2$, a hol 2 úgy p_1 -nek, mint p_2 -nek a primitív gyöke és a p_1-1 meg p_2-1 számok párossági foka ugyanaz. A p_1 és p_2 osztók révén lesz az előzők értelmében egy $\frac{p_1-1}{2}$ elemszámú és egy $\frac{p_2-1}{2}$ elemszámú ciklus. Most még meg kell határozni a $p_1 p_2$ osztóhoz tartozó ciklusokat. A 2-nek $p_1 p_2$ modulusához tartozó kitevője a p_1-1 és p_2-1 számok legkisebb közös többsége (M), úgy hogy

$$2^M - 1 \equiv (2^{\frac{M}{2}} - 1)(2^{\frac{M}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod{p_1 p_2}.$$

Mivel azonban az $\frac{M}{2}$ nem lehet többszöröse sem p_1-1 -nek, sem p_2-1 -nek, mert ezeknek párossági foka ugyanaz, azért szükségképen

$$2^{\frac{M}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p_1 p_2}$$

úgy hogy a $p_1 p_2$ osztó czímén csupa egyforma $\frac{M}{2}$ elemszámú ciklus keletkezik és így a *helyettesítés rendszáma* $\frac{M}{2}$.

Az $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_u^{a_u}$ esetre való általánosítás kézenfekvő.

5. $m = 2^z - 1$, $n = 2m + 1 = 2^z + 1$.

Mivel $2^\delta - 1$ csakis úgy osztható $(2^z + 1)$ -el, ha δ a z -nek páros többszöröse, azért most

$$\delta = 2z.$$

Tudjuk azt, hogy ha x relatív prim az n -hez, akkor

$$x = n^{\frac{2^\delta - 1 - 1}{2^\delta - 1}} = n^{\frac{2^\delta - 2}{2^\delta - 1}},$$

vagyis

$$xQ = x^{\frac{2^\delta - 1}{n}} = 2^{\delta - 1} - 1 - L.$$

Tekintetbe vévén az n és δ értékét

$$Q = \frac{2^{2z}-1}{2^z+1} = 2^z-1,$$

úgy hogy

$$xQ = x(2^z-1) = 2^{2z-1}-1-L, \quad (42)$$

a hol a jobboldal, mint 2 csökkenő hatványainak összege, $2z-1-(q-1)=2z-q$ tagból áll, ha q az x -et tartalmazó ciklus elemszámát jelenti. Ámde közvetlen beszorzással könnyű meggyőződni a felől, hogy a baloldalon álló xQ , mint 2 csökkenő hatványainak összege, pontosan z tagból fog állani, bármilyen n -nél kisebb szám legyen is az x . A (42) két oldalán a tagszámok egyenlők tartozván lenni, következik, hogy

$$q = z.$$

Vagyis azt kaptuk, hogy az n -hez relatív prim számok csupa z elemszámú ciklusba tartoznak. Ugyanezen eredmény tüstént következik abból a megfontolásból, hogy most

$$2^{\frac{\delta}{2}}+1 = 2^z+1 \equiv 0 \pmod{n},$$

mert hiszen $n = 2^z+1$. Mivel így az n -hez relatív prim számok csupa z elemszámú ciklusba oszlnak szét, azért e ciklusok száma

$$\frac{\varphi(n)}{\delta} = \frac{\varphi(2^z+1)}{2z}.$$

Ez szükségképen egész szám tartozván lenni, kell, hogy mindig igaz legyen a

$$\varphi(2^z+1) \equiv 0 \pmod{2z} \quad (43)$$

kongruencia.

De ezzel általában még nincsenek kimerítve a z elemszámú ciklusok. Mert ha q az n -nek olyan valódi osztója, a melyre vonatkozólag a 2 kitevője ugyancsak $2z$, akkor e q osztótól meghatározott elemek ugyancsak z -s ciklusokba fognak szétoszolni.

Allapítsuk meg most az olyan q valódi osztótól meghatározott ciklusokat, a melyre vonatkozólag a 2 kitevője δ -nál kisebb, tehát

$$\delta(q) = \frac{\delta}{t} = \frac{2z}{t}.$$

Ha egy ilyen ciklusba tartozó valamelyik elem x , akkor ez az előzők szerint írható az

$$x = n \frac{2^{\delta(q)-1} - 1 - L}{2^{\delta(q)} - 1}$$

alakban és így

$$xQ = x \frac{2^{\delta}-1}{n} = x \frac{2^{\delta(q)}-1}{n} (1 + 2^{\delta(q)} + \dots + 2^{(t-1)\delta(q)}),$$

vagyis

$$x(2^z-1) = (2^{\delta(q)-1} - 1 - L) (1 + 2^{\delta(q)} + \dots + 2^{(t-1)\delta(q)}). \quad (44)$$

Ha az egyenlet mindkét oldalát 2 csökkenő hatványainak összegeként írjuk, akkor a baloldal, mint az imént láttuk, pontosan z számú tagot, a jobboldal pedig nyilvánvalóan $t[\delta(q) - \varrho] = 2z - t\varrho$ számú tagot fog tartalmazni, a hol ϱ az x ciklusának elemszámát jelenti. A két tagszám egyenlítéséből következik, hogy

$$\varrho = \frac{z}{t}.$$

Mindenekelőtt az látszik tehát, hogy most csakis olyan ciklus fordulhat elő, a melynek elemszáma a z osztója, úgy hogy a ciklus-elemszámok legkisebb közös többszöröse z lévén, a *policiklikus helyettesítés rendszáma* z .

De még továbbá itt könnyű meghatározni az összes kisebb ciklusokat is. Legyenek ugyanis a z -nek mindazon tényezői, melyeknél a társtényező *páratlan* számú, rendre a következők: $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i, \dots, \zeta_u$, úgy hogy például

$$z = \vartheta_i \zeta_i,$$

a hol ϑ_i páratlan szám. Az

$$m_i = 2^{\zeta_i-1}$$

sámra vonatkozó policziklikus helyettesítés a fentiek szerint tartalmazni fog bizonyos λ_i számú ζ_i elemszámú ciklust; azt állítjuk, hogy épen ugyanennyi ugyanilyen ciklust fog tartalmazni az eredeti

$$m = 2^z - 1$$

sámra vonatkozó policziklikus helyettesítés is. Ha ugyanis megalkotjuk az

$$n_i = 2m_i + 1 = 2^{\zeta_i} + 1$$

$$n = 2m + 1 = 2^z + 1$$

sámokat, akkor az ismeretes oszthatósági tételnél fogva (hogy t. i. $2^z + 1$, akkor és csakis akkor osztható $(2^{\zeta_i} + 1)$ -el, ha ζ_i olyan osztója a z -nek, hogy a társtényező páratlan szám)

$$n = \theta_i n_i.$$

Azt azonban, hogy az m_i számra vonatkozó helyettesítésben egy bizonyos ξ szám egy ζ_i elemszámú ciklusba tartozik, a (35') képlet értelmében a

$$\xi = n_i \frac{2^{2^{\zeta_i}-1} - 1 - L}{2^{2^{\zeta_i}} - 1} \quad (45)$$

egyenlet fejezi ki, a miből azonban az n_i kiküszöbölésével az következik, hogy

$$\theta_i \xi = x = n \frac{2^{2^{\zeta_i}-1} - 1 - L}{2^{2^{\zeta_i}} - 1}, \quad (46)$$

a mi azt mutatja, hogy az m számra vonatkozó policziklikus helyettesítésben a $\theta_i \xi$ szám ugyancsak ζ_i elemszámú ciklusba tartozik. Ezzel be van bizonyítva, hogy az m -re vonatkozó helyettesítés *legalább* is λ_i számú ζ_i -s ciklust fog tartalmazni; most még azt kell kimutatni, hogy ennél többet nem is tartalmazhat. Tegyük tehát fel azt, hogy az m -helyettesítésben egy bizonyos x szám helyet foglal egy ζ_i elemszámú ciklusban, úgy hogy ekkor x kielégíti a (46) képletet; ennek jobboldalán azonban n -nek és $(2^{2^{\zeta_i}} - 1)$ -nek legnagyobb közös osztója $2^{\zeta_i} + 1 = n_i$, úgy hogy az

$$x \frac{n_i}{n} = \frac{x}{\theta} = \xi$$

okvetlen egész szám tartozik lenni, a mely kielégíti a (45) képletet, a mely azt fejezi ki, hogy a ξ szám beletartozik az m_i -re vonatkozó policziklikus helyettesítésnek egy ζ_i elemszámú ciklusába. Ennélfogva az m -helyettesítés *legfeljebb* λ_i számú ζ_i -s ciklust tartalmazhat. A két utóbbi eredmény együttesen csakis úgy állhat fenn, ha a ζ_i -s ciklusok száma az m -re vonatkozó helyettesítésben is pontosan λ_i .

Végezetül az is könnyen belátható, hogy másfajta ciklus, mint az előzőekben vizsgáltak, egyáltalán nem is létezhetik. Mivel tudjuk azt, hogy most csakis olyan ciklus szerepelhet, a melynek ϱ elemszáma a z -nek osztója, azért még egyedül az az eshetőség képzelhető, hogy a ϱ olyan osztója a z -nek, a melynek társtényezője *páros* szám, úgy hogy

$$z = 2\varrho,$$

a mi természetesen csakis páros z mellett fordulhatna elő. Ki fogjuk mutatni, hogy ilyen ciklus nem létezik. Tegyük tehát fel, hogy volna egy ilyen ciklus, és ennek egy eleme az x szám volna, akkor kellene, hogy

$$x = (2^z + 1) \frac{2^{2\varrho-1} - 1 - L}{2^{2\varrho} - 1}.$$

Mivel most a z párossági foka legalább is akkora, mint a 2ϱ -é, azért a $2^z + 1$ és $2^{2\varrho} - 1$ számok relatív primek és így a jobboldalon álló kifejezés nyilvánvalóan nem lehet egész szám, úgy hogy a ciklus létezésének feltételezése ellenmondásra vezet.

Ily módon teljesen be van bizonyítva a következő tétel. Ha a z -nek mindazon osztói, melyeknél a társtényező páratlan szám $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_u$, és ha az $m_i = 2^{\zeta_i-1}$ számra vonatkozó policziklikus helyettesítésben λ_i számú ζ_i -s ciklus van, akkor az $m = 2^{z-1}$ számra vonatkozó policziklikus helyettesítés λ_1 számú ζ_1 -es, λ_2 számú ζ_2 -s, \dots λ_i számú ζ_i -s, \dots λ_u számú ζ_u -s ciklusokból áll.

$\zeta_u = z$ -s ciklusra fog felbomlani, úgy hogy fenn kell állani a következő azonosságnak:

$$m = 2^{z-1} = \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2 + \dots + \lambda_i \zeta_i + \dots + \lambda z \quad (47)$$

a miből a z -s ciklusok számára a

$$\lambda = \frac{2^{z-1} - \lambda_1 \zeta_1 - \lambda_2 \zeta_2 - \dots - \lambda_{u-1} \zeta_{u-1}}{z} \quad (48)$$

képlet adódik ki.

Érdekes vonatkozásokra bukkanunk akkor, ha a (48) képlet alapján a λ_i -k folytatólagos kiküszöbölésével explicit alakban határozzuk meg a ciklusok számát. Czélszerű lesz külön tárgyalni azt a két esetet, hogy z páratlan, illetőleg páros szám.

Legyen tehát először is z páratlan szám, vagyis

$$z = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_v^{a_v}.$$

A z összes osztóinak száma

$$S(z) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_v + 1)$$

és mivel most mindenik osztónak páratlan szám a társtényezője, azért mindenik osztónak felel meg ciklus és így a különböző fajta ciklusok száma $S(z)$.

Határozzuk meg explicit alakban a z -ciklusok λ számát. Tájékozódásul vizsgáljuk mindenekelőtt azt a speciális esetet, hogy

$$z = p_1 p_2.$$

Mivel mostan a z -nek szóba jövő osztói:

$$\zeta_1 = 1, \zeta_2 = p_1, \zeta_3 = p_2,$$

azért a (48) képlet egymásutáni alkalmazása azt adja, hogy

$$\lambda_1 = \frac{2^0}{1} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{2^{p_1-1} - 1}{p_1}$$

$$\lambda_3 = \frac{2^{p_2-1}-1}{p_2}$$

$$\lambda = \frac{2^{p_1 p_2 - 1} - 2^{p_1 - 1} - 2^{p_2 - 1} + 1}{p_1 p_2}.$$

Ha az utolsó képletet

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{2^{p_1 p_2} - 2^{p_1} - 2^{p_2} + 2^1}{p_1 p_2} \quad (49)$$

alakban írjuk és ha figyelembe vesszük azt, hogy

$$\varphi(z) = \varphi(p_1 p_2) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) = p_1 p_2 - p_1 - p_2 + 1,$$

akkor a (49) képletben megnyilvánuló törvényszerűség szembe-
szökő. Most már a teljes indukció alkalmazásával bebizonyít-
ható, hogy a z fenti általános alakjánál z -s ciklusok számát a

$$\lambda = \frac{1}{2z} [\Sigma^2]_{\varphi(z)} \quad (50)$$

képlet adja meg, a hol a rövidített jelölés értelme abban áll,
hogy, ha

$$\varphi(z) = \Sigma \pm p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_v^{\beta_v}, \quad (51)$$

akkor legyen

$$[\Sigma^2]_{\varphi(z)} = \Sigma \pm 2p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_v^{\beta_v}. \quad (52)$$

Az (50) képlet természetesen alkalmazható a $z = \zeta_i$ helyettesi-
téssel az $m = 2^{z-1}$ szám policziklikus helyettesítésének ζ_i -s
ciklusainak meghatározására is, mert ezeknek száma a fentiek
szerint megegyezik az $m_i = 2^{\zeta_i-1}$ szám policziklikus helyettesi-
tésének ζ_i -s ciklusainak számával, úgy hogy a (48) képlet
átmegy most a következőbe:

$$2^z = \sum_{i=1}^u [\Sigma^2]_{\varphi(\zeta_i)},$$

a mi az ismeretes

$$\sum_{i=1}^u \varphi(\zeta_i) = z$$

összefüggésnél fogva valóban nyilvánvaló azonosság.

Mivel az (50) képlet jobboldala szükségképen egész szám tartozik lenni, azért e képlet a következő oszthatósági tételt foglalja magában:

$$[\Sigma 2]_{\varphi(z)} \equiv 0 \pmod{z}.^1 \quad (53)$$

Legyen másodszor z páros szám, tehát

$$z = 2^a \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_v^{a_v} = 2^a \cdot P.$$

A fentiek szerint ekkor csakis olyan ciklus létezhetik, a melynek elemszáma

$$\zeta_i = 2^a \cdot P_i$$

alakú, a hol a P_i a P -nek valamilyen osztója és ζ_i -nek páros-sági foka ugyanaz, mint a z -é, mert csakis így lehet a társ-tényező páratlan szám; ennél fogva a különböző fajta ciklusok száma most $S(P)$ lesz.

Ugyanúgy, mint előbb, teljes indukcióval kimutatható, hogy a z -s ciklusok számát a

$$\lambda = \frac{1}{2z} [\Sigma (2^{2a})]_{\varphi(P)} \quad (50')$$

képlet adja meg, a miből következik a

$$[\Sigma (2^{2a})]_{\varphi(P)} \equiv 0 \pmod{2^{a+1}P} \quad (53')$$

kongruencia helyes volta, a melyben P csupa páratlan törzsszám szorzatát jelenti.

Az is kitűnik a fentiekből, hogy az $n = 2^z + 1$ számnak, a hol $z = 2^a \cdot P$ csupa olyan tényezője van, a melyekre vonatkozólag a 2-höz tartozó kitevő $\delta(q) = 2^{a+1} \cdot P_i$, a hol a P_i valamilyen osztója P -nek. Ha nevezetesen $z = p$, akkor az n minden osztójához (a 3-tól eltekintve) tartozó kitevő $2p$.

Az is világos, hogy az $n = 2^z + 1$ szám csakis akkor lehet primszám, ha $z = 2^a$ alakú, mert különben az m szám policziklikus helyettesítésében léteznek a z -nél alacsonyabb elemszámú ciklusok is, a mely körülmény valódi osztó jelenlétére mutat. Ez a számelméleti tétel tudvalevőleg ismeretes.

$$6. m = 2^{z-1} - 1, \quad n = 2m + 1 = 2^z - 1.$$

A jelen esetben $\delta = z$ és így az n -hez relatív prim x számokra vonatkozólag a (35) képlet szerint

$$x = n \frac{2^{\delta-1} - 1 - L}{2^{\delta} - 1} = 2^{z-1} - 1 - L$$

és mivel most

$$Q = \frac{2^{\delta} - 1}{n} = 1,$$

azért ugyancsak

$$xQ = x = 2^{z-1} - 1 - L.$$

Ha itt a baloldal, vagyis x , mint 2 hatványösszege σ tagból áll és ha az x egy q elemszámú ciklusba tartozik, akkor kell, hogy

$$q = z - \sigma. \quad (54)$$

Ugyanígy áll a dolog, ha x olyan q osztótól meghatározott elem, a melyre vonatkozólag a 2 kitevője ugyancsak z .

Ha általában q olyan valódi osztója az n -nek, hogy a hozzá tartozó kitevő

$$\delta(q) = \frac{\delta}{t} = \frac{z}{t},$$

akkor a tőle meghatározott x elemekre vonatkozólag

$$xQ = x = (1 + 2^{\delta(q)} + \dots + 2^{(t-1)\delta(q)}) (2^{\delta(q)-1} - 1 - L).$$

Innen az következik, hogy ha x , mint 2 hatványösszege σ tagból áll és ha az x ciklusának elemszáma q , akkor

$$q = \frac{z - \sigma}{t}. \quad (55)$$

¹ Ezen oszthatósági tétel nem adja a 2-nek különös tulajdonságát, mert az (53) kongruencia igaz marad akkor is, ha a baloldalon a 2 helyén bármely egész szám áll. Lásd RADOS GUSZTÁVNAK „Egy geometriában fellépő számelméleti problémáról” című értekezését. (Mathemat. és Természettud. Értesítő III. k.)

Az előbbi (54) képlet ebben bennfoglaltatik a $t = 1$ speciális esetnek megfelelőleg.

Mivel σ legkisebb értéke 1, és legnagyobb értéke (a mi az

$$m = 2^{z-1} - 1 = 2^{z-2} - 2^{z-3} + \dots + 2 + 1$$

számnak felel meg), $z-1$, azért az (54) képlet szerint a leg-hosszabb ciklus $z-1$ és a legrövidebb ciklus 1 elemből áll.

Könnyű belátni továbbá azt is, hogy *most szükségképpen mindenfajta ciklus szerepelni fog az 1-estől egészen a $(z-1)$ -esig.* A σ ugyanis az 1 és m között fekvő x számoknak megfelelőleg rendre felvesz minden értéket 1-től $(z-1)$ -ig. Ha σ relatív prim z -hez, akkor az (54) szerint olyan ciklusokat kapunk, melyeknél a ϱ elemszám relatív prim a z -hez. Ha most már ϱ egy tetszőlegesen megadott z -nél kisebb pozitív egész szám és ha a z osztói közül olyan t -t veszünk, hogy

$$1 \leq \sigma = z - \varrho t \leq z - 1,$$

akkor okvetlen létezik olyan x szám, a mely mint 2 hatványösszege σ tagból áll. De sőt most ez a σ többszöröse lévén a t -nek, létezik olyan x szám, a melyre vonatkozólag a (15)-nek megfelelő

$$x = A_1 2^{z-1} + A_2 2^{z-2} + \dots + A_K 2^{z-K} + \dots + A_{z-1} 2 + A_z \quad (56)$$

$$(0 \leq A_K \leq 1)$$

összeg alakban a teljes együtthatórendszer t periodusra bomlik fel. Ámde ekkor, mint ez a XXII. k. 37-ik lapján mondottakból következik, az x elem olyan q osztótól van meghatározva, a melynél a 2 kitevője $\delta(q) = \frac{z}{t}$; így aztán az (55) képlet alkalmazása azt adja, hogy az x elem valóban az előírt ϱ elemszámú ciklusba tartozik.

Mivel tehát a ciklus elemszám ϱ felvesz minden értéket 1-től egészen $(z-1)$ -ig, azért most a *policiklikus helyettesítés rendszáma a $(z-1)$ -ig terjedő egész számok legkisebb közös többszöröse.*

Határozzuk meg itt is explicit alakban a ϱ elemszámú cik-

lusok számát (λ_q). Az általános eset tárgyalását megelőzőleg vizsgáljuk azt a speciális esetet, hogy a z páratlan törzsszám.

Legyen tehát

$$z = p.$$

Ekkor az $n = 2^p - 1$ számnak csupa olyan q osztója van, a melyre vonatkozólag a 2 kitevője ugyancsak $\delta = p$; ennél fogva az (56) kifejtésben a teljes együttthátórendszer nem bomolhat fel periodusokra. A q elemszámú ciklusokat az (54) szerint azon $x \leq m$ számok fogják alkotni, a melyek 2 csökkenő hatványai szerint kifejtve

$$\sigma = p - q$$

tagból állanak, a melyeknél tehát az (56) összegalakban a p számú együttthátó közül $p - q$ zérustól különböző. Ha az (56) jobboldalán az A_K együttthátóknak minden lehetséges módon adunk 0 és 1 értékeket, akkor rendre megkapjuk az összes $x \leq n$ számokat. Tudjuk azt, hogy az m -re vonatkozó policziklikus helyettesítés egy bizonyos ciklusa a maga egészében benn foglaltatik az n -re vonatkozó $2x$ törvényű lineáris helyettesítés egy bizonyos ciklusában, a melynek összes elemei az (56) alakban kiadódnak, ha egy elemnek a teljes együttthátó rendszerében egymásután ciklikus felcseréléseket alkalmazunk. Ilyen módon elegendő meghatározni a policziklikus helyettesítés q -s ciklusainak megfelelő ciklusokat a lineáris helyettesítésben. Ezen ciklusokat mindazon $x \leq n$ elemek alkotják, a melyeknél az (56) összegalakban a zérustól különböző együttthátók száma $p - q$; az ilyen elemek száma nem egyéb, mint a p számmal lévő A_K együttthátókból megalkotható $(p - q)$ -adik kombinációk száma, azaz

$$\binom{p}{p-q}$$

és mivel ezek közül mindig, a teljes együttthátók ciklikus felcseréléseinek megfelelőleg, p számú elem egy-egy ciklusba tartozik, azért a keresett ciklusok száma

$\lambda_q = \frac{1}{p} \binom{p}{p-q} = \frac{1}{p} \binom{p}{q}$
 lesz.

Közvetlenül látható, hogy a q -s és $(p-q)$ -s ciklusok egyforma számmal vannak. Mivel a policziklikus helyettesítésben összesen m elem szerepel, azért kell, hogy

$$\sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{q} \cdot q = 2^{p-1} - 1,$$

a mely egyenlet, más alakban írva, a binomiális együtthatók egy ismeretes tulajdonságát fejezi ki.

Legyen most általában z tetszőleges összetett szám, tehát

$$z = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_v^{a_v}.$$

Tartsuk szem előtt mindjárt azt az általánosabb esetet, hogy a q -nak és z -nek van legnagyobb közös osztója, a mely

$$D = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_v^{a_v}$$

alakú, a hol a jobboldalon bizonyos kitevők zérusok is lehetnek. Most azon $x \leq m$ számok fognak a q -s ciklusokba tartozni, a melyeknél az (56) összegalakban a zérustól különböző együtthatók száma az (55) képlet szerint eleget tesz a következő feltételnek:

$$\sigma = z - qt \leq z - 1, \quad (57)$$

a hol t a z -nek valamilyen osztója. Ugyanúgy, mint az előző specziális esetben, itt is elegendő lesz meghatározni az n -re vonatkozó lineáris helyettesítés mindazon ciklusait, melyek az m -re vonatkozó policziklikus helyettesítés q elemszámú ciklusainak felelnek meg; a szóban forgó ciklusokba mindazon $x \leq n$ számok tartoznak, a melyeknél az (56) alakú előállítás zérustól különböző együtthatóinak száma eleget tesz az (57) követelésnek.

Keressük először is azt, hogy $t = 1$ czímen hány ciklus fog keletkezni? Ezen ciklusokat mindazon $x \leq n$ elemek fogják

alkotni, a melyeknél az (56) összegben a zérustól különböző együtthatók száma $z - \varrho$, és a teljes együtthatórendszer nem bomlik periodusokra; ezen elemek számát tehát úgy kapjuk meg, ha a $\binom{z}{z-\varrho} = \binom{z}{\varrho}$ számból levonjuk mindazon elemek számát, a melyeknél a teljes együtthatórendszer ($z - \varrho$ zérustól különböző együttható mellett) periodusokra bomlik.

A periodusok csakis úgy állhatnak elő, hogy a σ többszöröse a D valamelyik osztójának; nyilvánvalólag $\frac{z}{p_1}$ elemből fog állani a legnagyobb lehetséges periodus, mikor is a periodusok száma p_1 és mindenikben $\frac{z}{p_1} - \frac{\varrho}{p_1}$ együttható egyenlő az egységgel, míg a többi zérus, úgy hogy az ilyen együtthatórendszerek száma:

$$\binom{\frac{z}{p_1}}{\frac{z}{p_1} - \frac{\varrho}{p_1}} = \binom{\frac{z}{p_1}}{\frac{\varrho}{p_1}}.$$

Közvetlenül világos, hogy ezek a periodusok már tartalmazzák azokat a periodusokat is, a melyek még alperiodusokra bomlanak, a mely alperiodusok elemszáma például $\frac{z}{p_1^{p_1}}$. Tehát a fenti binomiális együttható megadja mindazon x -ek számát, a melyek a p_1 törzsszám osztó révén keletkező periodusok miatt esnek levonás alá. Hasonlóképen a p_2 osztó miatt levonandó volna

$$\binom{\frac{z}{p_2}}{\frac{\varrho}{p_2}}$$

számú x elem; ámde a két levont együtthatórendszer fajták között vannak közösek is, tudniillik azok, a melyeknél a főperiodus $\frac{z}{p_1 p_2}$ számú együtthatóból áll, a melyeknek száma

$$\binom{\frac{z}{p_1 p_2}}{\frac{\varrho}{p_1 p_2}}$$

mivel tehát ezt a számot a fentiekben kétszer vontuk le, azért utólag egyszer hozzá is kell adni. Ilymódon látnivaló, hogy a p_1 és p_2 törzsszámok révén levonandó elemek száma

$$\left(\frac{\frac{z}{p_1}}{\frac{q}{p_1}}\right) + \left(\frac{\frac{z}{p_2}}{\frac{q}{p_2}}\right) - \left(\frac{\frac{z}{p_1 p_2}}{\frac{q}{p_1 p_2}}\right).$$

Ha ezen kiselejtezési eljárást folytatjuk, illetőleg a teljes indukziót alkalmazzuk és ha meggondoljuk azt, hogy a hátramaradó elemek csupa z -s ciklusokat alkotnak, akkor azt kapjuk, hogy a policziklikus helyettesítésben a $t = 1$ címen keletkező q -s ciklusok számát a következő képlet adja meg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} B_z^q = \frac{1}{z} & \left[\left(\frac{z}{q}\right) - \left(\frac{\frac{z}{p_1}}{\frac{q}{p_1}}\right) - \dots - \left(\frac{\frac{z}{p_v}}{\frac{q}{p_v}}\right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\frac{z}{p_1 p_2}}{\frac{q}{p_1 p_2}}\right) + \dots - \left(\frac{\frac{z}{p_1 p_2 p_3}}{\frac{q}{p_1 p_2 p_3}}\right) - \dots + \dots \right] \end{aligned} \quad (58)$$

a hol a B_z^q -val jelölt összegben a binomiális együtthatók felső, illetőleg alsó számai a

$$z \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_v}\right)$$

szorzatnak, illetőleg a

$$q \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_v}\right)$$

szorzatnak egymásra következő tagjai. A B_z^q összeg képezési törvénye természetesen úgy értelmezendő, hogy benne csakis azok a törzsszámok szerepelnek, a melyek a q -nak osztói; vagyis az általános képletben mindazon binomiális együtthatók helyébe, melyeknél az alsó szám nem egész szám, zérus teendő.

Keressük most azt, hogy a $t = \zeta_i$ címen hány q -s ciklus

fog keletkezni, a hol a ζ_i a z -nek valamelyik osztója. Ekkor az (57) képlet átmegy a következőbe:

$$\sigma = z - \varrho \zeta_i = \xi_i \left(\frac{z}{\zeta_i} - \varrho \right).$$

Most tehát a keresett ciklusokba tartozó számok teljes együttható rendszereiben ζ_i periodus van, mindenik $\frac{z}{\zeta_i}$ elem-számmal és mindenik periodusban $\frac{z}{\zeta_i} - \varrho$ együttható tartozik zérustól különböző lenni. Minden ilyen periodus közül azonban csakis az használható a melyik nem bomlik fel alacsonyabb rendszámú periodusokra. Ebből világos, hogy a kiselejtezési eljárás most is úgy végzendő, mint előbb, csak hogy a z helyébe a $\frac{z}{\zeta_i}$ lép. Ilymódon a $t = \zeta_i$ czímen keletkező ϱ -s ciklusok számát az

$$\frac{1}{z} B_{\frac{z}{\zeta_i}}^{\varrho}$$

utasítás fogja megadni, a melyben a szimbolikus jelölés értelmét az (58) képlet mutatja meg. Ennélfogva az összes ϱ -s ciklusok számának meghatározására a következő explicit képletet állíthatjuk fel:

$$\lambda_{\varrho} = \sum_{(i)} \frac{\zeta_i}{z} B_{\frac{z}{\zeta_i}}^{\varrho}, \quad (59)$$

a melyben az összegezés i mindazon értékeire terjesztendő ki, a melyek mellett

$$\frac{z}{\zeta_i} > \varrho.$$

Ez utóbbi megszorítás azért szükséges, mert a σ jelentésénél fogva pozitív egész szám tartozik lenni.

Végezetül jegyezzük meg azt, hogy az (58) kifejezés értéke egész szám lévén, mindig fennáll a következő kongruencia:

$$B_z^{\varrho} \equiv 0 \pmod{z},$$

a melyben ϱ bármely a z -nél kisebb egész számot jelenthet.

Ifj. Sily Kálmán.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Matematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

24. évfolyam. 1915. május—október. 5—6. füzet.

A GÁZ ENERGIAINGADOZÁSA; ANALOGIA SUGÁRZÁSI INGADOZÁS ÉS A GÁZ ENERGIAINGADOZÁSA KÖZÖTT.

Egy tetszésszerű rendszer entrópiája és bizonyos állapotjelzőkkel meghatározott állapotának valószínűsége közötti összefüggést az ismeretes BOLTZMANN-féle egyenlet: $S = k \log W$ fejezi ki, ahol S az entrópiát, k univerzális állandót $(1,34 \cdot 10^{-16} \frac{\text{g cm}^2}{\text{sec}^2 \text{ fok}})$, W a tekintetbe vett állapot valószínűségét jelenti. A valószínűség értéke a lehetséges módok (komplexiók) számával van meghatározva, azzal a számmal, a mely megadja, hányféleképen állhat elő a kérdéses állapot, feltéve, hogy az egyes módok egyenlő valószínűségűek. Előfordulhat, hogy bizonyos esetekben a lehetséges módok száma nem határozható meg; ha a rendszer entrópiája ismeretes, az entrópia jelzett egyenletét a valószínűség W értékének kiszámítására használhatjuk fel. A

$$W = e^{\frac{S}{k}} \quad (1)$$

egyenlet segítségével képesek vagyunk azután kiszámítani a gáz energiaingadozásának középértékét egy meghatározott kis térfogatrészben.

A következőkben (I) a BOLTZMANN-féle elv alapján számítom¹ a gáz energiaingadozásának középértékét egy kicsiny térfogatrészben. Az ingadozás középértékét, illetőleg közép relatív értékét (ingadozás középértéke osztva az átlagos energiaértékkel)

¹ Az (1) egyenlet segítségével számította először A. EINSTEIN a sugárzási ingadozás értékét. L. Phys. Zeitschr. X. 188. l. (1909).

fogom számítani;¹ ezek az értékek adnak számot az energia átlagos ingadozásáról s általában mélyebb betekintést engednek az illető jelenség lényegébe, mint az átlagos értékek. Valamint a népességi statisztikában nem a születések illetőleg halálesetek középértékei, hanem a középértékek körüli ingadozások érdekelnek, épenígy a fizikában statisztikai vizsgálatoknál czélszerű a középíngadozásokat számítani... A második részben (II) arról lesz szó, hogyan számíthatjuk ki a gáz energiaingadozásának középértékét a kinetikai gázelmélet segítségével; a harmadik részben (III) a sugárzási ingadozás és a gáz energiaingadozása közötti analogiát vizsgálom.

I.

A gáz energiaingadozásának kiszámítása a Boltzmann-féle elv alapján.

Vegyünk tekintetbe egy ideális, egyenletes hőmérsékletű gázt tartalmazó edényt teljesen visszaverő, ugyanazon hőmérsékletű (T) s hőtanilag izoláló (azaz a hőt át nem bocsátó) oldalfalakkal. A molekulák az edény bármely térfogatrészében ugyanazon feltételek alatt álljanak. Vegyük tekintetbe a $V = V_1 + V_2$ térfogatú edénynek egy a V_2 térfogathoz képest igen kicsiny V_1 térfogatrészét ($V_1 \ll V_2$). Jelöljük a gáz energiájának egyenletes elosztódás melletti értékeit a V_1 , illetőleg V_2 térfogatrészben E_1 , illetőleg E_2 -vel. A termodinamikai egyensúlyban levő gáz energiaingadozása egy tetszősszerű térfogatrészben két egymástól független részből áll. Az első rész az által keletkezik, hogy a kérdéses térfogatrészben átlagos számban jelenlevő molekulák az összeütközések miatt oly momentán energiaértéket adnak, mely kisebb vagy nagyobb, mint az az energiaérték, melyet a molekulák adnának, ha egymással egyáltalában nem ütköznének össze; a molekulák tehát né-

¹ A következőkben tehát meg kell különböztetnünk a középíngadozás értékét a közép (v. középso) relativ ingadozás értékétől.

melykor gyorsabbak (melegebbek), némelykor lassabbak (hidegebbek) lehetnek. A második rész keletkezésének az az oka, hogy a térfogatrészt molekuláinak száma változik, bizonyos átlagos értéknél némelykor több, némelykor kevesebb molekula van jelen. Nevezzük a gáz energiaingadozásának e két részét «hőingadozás»-nak (ε_H), illetőleg «sűrűségi ingadozás»-nak (ε_S). A «sűrűségi ingadozás» elnevezés tehát a következőkben mindig az energiaingadozás azon részét jelenti, melyet a molekulák számának változása hoz létre.

Hőingadozás. Jelöljük a molekulák számát egyenletes elosztódásuk esetén a V_1 , illetőleg V_2 térfogatrészen n_1 , illetőleg n_2 -vel s tegyük fel, hogy a tekintetbe vett V_1 térfogatrészt molekuláinak száma állandó. Változzék most és pedig növekedjék a V_1 térfogatrészt energiája δE -vel, a térfogatrészek energiája akkor

$$E'_1 = E_1 + \delta E, \quad \text{illetőleg} \quad E'_2 = E_2 + \delta E.$$

Az edény teljes térfogatában levő, jelzett állapotú gázmennyiség entrópiája egyenlő a térfogatrészek entrópiáinak az összegével ¹

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 = \bar{S}_1 + \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial E_1} \right)_{V_1} \delta E + \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial E_1^2} \right)_{V_1} \frac{(\delta E)^2}{2} \\ + \bar{S}_2 + \left(\frac{\partial \bar{S}_2}{\partial E_2} \right)_{V_2} \delta E + \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_2}{\partial E_2^2} \right)_{V_2} \frac{(\delta E)^2}{2} + \end{aligned} \quad (2)$$

a δE -ben másodfokúnál magasabb fokú tagok, a hol \bar{S}_1 , illetőleg \bar{S}_2 a V_1 , illetőleg V_2 térfogatok entrópiáját jelenti egyenletes energiaelosztódás esetén; a zárjel melletti index jelzi, hogy az n_1 , illetőleg n_2 molekula térfogatát állandónak vesszük.

$$dS_1 = \frac{dE_1 + p dV_1}{T}, \quad \left\{ \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial E_1} \right)_{V_1} - \left(\frac{\partial \bar{S}_2}{\partial E_2} \right)_{V_2} \right\} \delta E = 0, \quad (3)$$

mivel $\left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial E_1} \right)_{V_1} = \left(\frac{\partial \bar{S}_2}{\partial E_2} \right)_{V_2} = \frac{1}{T}$, vagy mivel hőtanilag izolált gáz

¹ Azon feltevéssel, hogy az entrópia összegezési tétele jelen esetben helyes, a mi egymástól függő rendszerek esetében általánosan nem áll, a mint azt M. LAUE mutatta ki először. L. Ann. d. Phys. XX. 365. l. (1906.)

termodinamikai egyensúlyának esetén $\delta(S_1 + S_2) = \delta S = 0$ egyenletnek teljesülnie kell.

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial E_1^2}\right)_{V_1} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial E_1} \quad (4)$$

$\left(\frac{\partial^2 \bar{S}_2}{\partial E_2^2}\right)_{V_2} \frac{(\delta E)^2}{2}$ -t elhanyagolhatjuk, mivel V_2 igen nagy V_1 -hez képest. Az (1) alatti egyenlet tehát a (2) (3) (4) alapján a δE -ben másodfokúnál magasabb fokú tagok elhanyagolásával

$$W = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{a}{2}\varepsilon^2},$$

a hol $\varepsilon = \delta E$, $a = \frac{1}{kT^2} \frac{\partial T}{\partial E_1}$. Ennélfogva a valószínűsége annak, hogy a V_1 térfogatrészt hőingadozása ε és $\varepsilon + d\varepsilon$ között van, a következő egyenlettel van adva¹

$$wd\varepsilon = \frac{e^{-\frac{a}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon} = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Ebből a hőingadozás középértéke:

$$\overline{\varepsilon_{KH}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 wd\varepsilon = \frac{1}{a} = kT^2 \frac{\partial E_1}{\partial T}.$$

$\overline{\varepsilon_{KH}^2}$ meghatározása végett szükségünk van tehát a V_1 térfogatrészt átlagos energiaértékére. A gázmolekuláknak négyfajta energiájuk van: 1. tranzlációs energiájuk a tranzlációs mozgásuk miatt, 2. rotációs energiájuk a molekulák forgása révén, 3. rezgési energiájuk a molekulákban rezgő atomok következtében, 4. potenciális energiájuk. Vizsgálataimban a tranzlációs és rotációs energiára szorítkozom; E_1 tehát egyenleteinkben a tranzlációs és rotációs energia összegét jelenti.

$E_1 = \frac{n_1 q}{2} kT$, a hol q a tranzlációs és rotációs koordiná-

¹ Az itt adott valószínűség a «matematikai valószínűség», míg az (1)-ben szereplő valószínűség a «termodinamikai valószínűség».

ták száma. A hőingadozás középértéke, illetőleg a közép relatív hőingadozás következőleg

$$\overline{\varepsilon_{kH}^2} = \frac{n_1 q}{2} k^2 T^2, \text{ illetőleg } \overline{\varepsilon_H^2} = \frac{2}{n_1 q}. \quad (5)$$

Sűrűségi ingadozás. Változzék most a tekintetbe vett, termodinamikai egyensúlyban levő gáz n_1 , illetőleg n_2 molekulájának V_1 , illetőleg V_2 térfogata δV -vel és pedig legyen

$$V_1' = V_1 + \delta V, \text{ illetőleg } V_2' = V_2 - \delta V.$$

Az egész gázmennyiség entrópiája

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 = \bar{S}_1 + \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial V_1} \right)_{E_1} \delta V + \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial V_1^2} \right)_{E_1} \frac{(\delta V)^2}{2} \\ + \bar{S}_2 + \left(\frac{\partial \bar{S}_2}{\partial V_2} \right)_{E_2} \delta V + \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_2}{\partial V_2^2} \right)_{E_2} \frac{(\delta V)^2}{2} + \end{aligned} \quad (6)$$

a δV -ben másodfokúnál magasabb fokú tagok, a hol \bar{S}_1 , illetőleg \bar{S}_2 az n_1 , illetőleg n_2 molekulának az entrópiája a molekulák egyenletes elosztódása esetén; a zárjel melletti index jelzi, hogy az n_1 , illetőleg n_2 molekula energiáját állandónak vesszük.

$$\left\{ \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial V_1} \right)_{E_1} - \left(\frac{\partial \bar{S}_2}{\partial V_2} \right)_{E_2} \right\} \delta V = 0, \text{ mivel } \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial V_1} \right)_{E_1} = \left(\frac{\partial \bar{S}_2}{\partial V_2} \right)_{E_2} = \frac{p}{T}, \quad (7)$$

vagy mivel a $\delta(\bar{S}_1 + \bar{S}_2) = 0$ egyenletnek teljesülnie kell.

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{S}_1}{\partial V_1^2} \right)_{E_1} = - \frac{R n_0}{V_1^2} = - \frac{k n_1}{V_1^2}, \quad (8)$$

a hol R az abszolút gázállandót, n_0 az n_1 molekula móljainak a számát jelenti. $\left(\frac{\partial^2 \bar{S}_2}{\partial V_2^2} \right)_{E_2} \frac{(\delta V)^2}{2}$ és a δV -ben másodfokúnál magasabb fokú tagok elhanyagolhatók; az (1) alatti egyenlet tehát

$$W = \text{konst. } e^{-\frac{n_1}{2V_1^2} v^2},$$

a hol $v = \delta V$. A matematikai valószínűsége annak, hogy n_1 molekula térfogatingadozása v és $v+dv$ között van, következőleg

$$w dv = \frac{e^{-\frac{n_1}{2V_1^2} v^2} dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_1}{2V_1^2} v^2} dv} = \sqrt{\frac{n_1}{2V_1^2 \pi}} e^{-\frac{n_1}{2V_1^2} v^2} dv.$$

n_1 molekula térfogatingadozásának közép ($\overline{\varepsilon_{kV}^2}$), illetőleg közép relativ négyzete ($\overline{\varepsilon_V^2}$) tehát

$$\overline{\varepsilon_{kV}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 w dv = \frac{V_1^2}{n_1}, \text{ illetőleg } \overline{\varepsilon_V^2} = \frac{1}{n_1}.$$

n_1 molekula relativ térfogatingadozásának közép négyzete azonban egyenlő a V_1 térfogatrész molekulaszámának közép relativ ingadozási négyzetével:

$$\overline{\varepsilon_V^2} = \frac{(V_1 - V)^2}{V_1^2} = \frac{(d - d_1)^2}{\bar{d}^2},$$

a hol d , illetőleg \bar{d} a megfelelő sűrűséget jelenti. Másfelől

$$\frac{(d - d_1)^2}{\bar{d}^2} = \frac{(n - n_1)^2}{\bar{n}^2} = \frac{(n - n_1)^2}{n_1^2},$$

a hol n_1 , illetőleg \bar{n} -el a d_1 , illetőleg \bar{d} -nek megfelelő molekulaszámot jelöljük a V_1 térfogatrészben. A molekulaszám közép relativ ingadozása a V_1 térfogatrész közép relativ energiaringadozásának egyúttal azt a részét is adja, a melyet a molekulaszám ingadozása hoz létre. A számlálóban és nevezőben levő közös tényező: $\left(\frac{q}{2} kT\right)^2$ kiesik, a V_1 térfogatrész relativ sűrűségi ingadozásának közép négyzete tehát

$$\overline{\varepsilon_S^2} = \frac{1}{n_1} \quad (9)$$

II.

A gáz energiaingadozásának kiszámítása a kinetikai gázelmélet alapján.

Hőingadozás. Az n_1 molekulát tartalmazó térfogatrész állapot-határozói legyenek: 1. a sebességi koordináták: $p_1, p_2, \dots, p_{3n_1}$ (a tranzlációs mozgásra vonatkozólag), 2. szögsebességi koordináták: q_1, q_2, \dots .¹ A valószínűsége annak, hogy a $p_1, \dots, p_{3n_1}, q_1, \dots$ állapothatározók egy tetszőszerinti időpontban $p_1, \dots, p_{3n_1}, q_1, \dots$ és $p_1 + dp_1, \dots, p_{3n_1} + dp_{3n_1}, q_1 + dq_1, \dots$ értékek közé esnek, az ismeretes BOLTZMANN-féle egyenlet alapján

$W dp_1 \dots dp_{3n_1} dq_1 \dots = C e^{-\frac{E}{kT}} dp_1 \dots dp_{3n_1} dq_1, \dots$ (10)
a hol C állandó, E a $p_1, \dots, p_{3n_1}, q_1, \dots$ által meghatározott állapothoz tartozó energiát jelenti. Ha a gáz energiája az egész edényben egyenletesen van elosztódva, a V_1 térfogatrész mindegyik koordinátájához tartozó energiaérték $\frac{kT}{2}$.² A V_1 térfogatrész egyes koordinátáinak megfelelő energiaingadozás közép-négyszetét a (10) alatti egyenletből határozhatjuk meg. Annak a valószínűsége, hogy a p_1 koordináta p_1 és $p_1 + dp_1$ közé esik,

$$W dp_1 = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{m}{2kT} p_1^2} dp_1 = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{m}{2kT} (p_1^2 - p_1^2)} dp_1$$

¹ Egyatomú gázaknál — nem lévén rotációs energiájuk — a szögsebességi koordináták elmaradnak. A rotációs energia hiányát azzal magyarázhatjuk, hogy a molekula forgását jellemző három forgási tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok elhanyagolható kicsinyek. Két atomú gázaknál két, három és több atomú gázaknál három szögsebességi koordináta veendő tekintetbe (két atomúaknál a harmadik — a két atomot összekötő — forgási tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték elhanyagolható).

² p_1^2 -nak középértéke (10)-ből

$$\overline{p_1^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p_1^2 e^{-\frac{m}{2kT} p_1^2} dp_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2kT} p_1^2} dp_1} = \frac{kT}{m},$$

tehát a p_1 -hez tartozó átlagos energiaérték: $\frac{1}{2} m \overline{p_1^2} = \frac{1}{2} kT$. Az energia egyenletes elosztódása esetén ugyanez az érték következik $\frac{1}{2} m \overline{p_2^2}, \frac{1}{2} m \overline{p_3^2}, \dots$ számára.

egyenlet által van meghatározva, a hol $p_0^2 = \frac{kT}{m}$ p_1^2 -nak középértékét, m egy molekula tömegét jelenti. Kövefkezőleg $(p_1^2 - p_0^2)^2$ középértéke

$$\begin{aligned} \overline{(p_1^2 - p_0^2)^2} &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (p_1^2 - p_0^2)^2 e^{-\frac{m}{2kT} p_1^2} dp_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2kT} p_1^2} dp_1} = \\ &= \frac{\frac{3}{2^2} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^5}}}{\sqrt{\frac{\pi}{\frac{m}{2kT}}}} - \frac{\frac{kT}{m} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^3}}}{\sqrt{\frac{\pi}{\frac{m}{2kT}}}} + \left(\frac{kT}{m}\right)^2 \\ \overline{(p_1^2 - p_0^2)^2} &= 2 \left(\frac{kT}{m}\right)^2. \end{aligned}$$

Tehát a p_1 koordinátához tartozó energiaingadozás közép-négyzete:

$$\overline{(e_1 - e_0)^2} = \frac{(kT)^2}{2},$$

a hol $e_1 = \frac{1}{2} m p_1^2$, e_0 (középenenergia) $= \frac{1}{2} m p_0^2$. Ugyanez az érték következik (10)-ből a p_2, \dots, p_{3n_1} -nek megfelelő energiaingadozás közép-négyzetére.

A szögsebességi koordinátáknál — tekintettel az energia kifejezésére, a mely a szögsebességi koordinátákban négyzetes — hasonlóképen járhatunk el s kapjuk minden egyes szögsebességi koordinátánál a megfelelő energiaingadozás közép-négyzete számára a $\frac{(kT)^2}{2}$ értéket. A V_1 térfogatrész hőingadozásának közép-négyzete egyenlő az egyes koordinátáknak megfelelő energiaingadozások közép-négyzetei összegével.¹ Követ-

¹ Tekintetbe véve a valószínűségi számítás következő tételét: Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n egymástól független változó mennyiségek. Összegük

kezőleg térfogatrészünk n_1 molekulája hőingadozásának, illetőleg relativ hőingadozásának középnégyzete

$$\overline{\varepsilon_{kH}^2} = \frac{n_1 q}{2} h^2 T^2, \text{ illetőleg } \overline{\varepsilon_H^2} = \frac{2}{n_1 q}.$$

a mi az (5) alatti értékkel megegyezik.

Sűrűségi ingadozás. A (10) alatti BOLTZMANN-EINSTEIN-féle egyenlet segítségével a sűrűségi ingadozás középértékét is kiszámíthatjuk. Gondoljunk egy hengeralakú, egyenletes keresztmetszetű, hőtanilag izoláló oldallal bíró edényt, a mely az egyik végén zárt, másik végén egy nagy gáztartóval van összekötve.¹ Egy könnyen mozgatható dugattyúval (súlya legyen elhanyagolható) zárjuk ebbe az edénybe az eddigi tárgyalásainkban tekintetbe vett V_1 térfogatrészt n_1 molekuláját. Az elzárt gáz térfogatát, nyomását, hőmérsékletét normál állapotban — azaz, ha ez állapothatározók a dugattyú mindkét oldalán egyenlő értékűek — jelöljük V_1 -el, p_1 -el, T -vel. A molekulák szabálytalan lökései következtében a dugattyú helye, tehát az elzárt gáz V_1 térfogata folytonos ingadozásoknak van alávetve. Annak a valószínűsége, hogy egy tetszőszerinti időpillanatban az elzárt gáz térfogata V és $V+dV$ között van,

$$WdV = \text{konst. } e^{-\frac{\Phi}{kT}} dV,$$

a hol

$$\Phi = - \int_{V_1}^V (p - p_1) dV$$

az elzárt gáznak a kérdéses állapotból a normál állapotába való átmenetelnél végzett munkáját, p a V térfogatra össze-

négyzetének középértéke, ha $\overline{x_i} = 0$ ($i = 1. 2. \dots n$), a következő egyenlettel van adva

$$\overline{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2} = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2} + \dots + \overline{x_n^2},$$

a betűk feletti vízszintes vonalkával a középértéket jelölve.

L. CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung, I, Dritte Auflage, 77. oldal.

¹ Az itt alkalmazott kísérlet alapgondolatát SMOLUCHOWSKI-tól vettem. L. Ann. d. Phys. XXV. 205. l. (1908) és Phys. Zeitschr. XIII. 1069. l. 1912.

nyomott gáz nyomását jelenti. Annak a valószínűsége, hogy a relativ térfogatingadozás: $\eta = \frac{V - V_1}{V_1}$ η és $\eta + d\eta$ közé esik,

$$Wd\eta = \text{konst.} \cdot e^{\frac{N}{RT} \int_{V_1}^V (p - p_1) dV} d\eta.$$

Normál állapothoz közel álló állapotokat véve tekintetbe, a kitevőt TAYLOR-sorba fejthetjük¹ s csak az első tagot véve tekintetbe

$$Wd\eta = \text{konst.} \cdot e^{\frac{N}{2RT} V_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_1 \eta^2} d\eta = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{n_1}{2} \eta^2} d\eta,$$

mivel $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_1 = -\frac{RTn_0}{V_1^2}$. Következőleg a relativ térfogatingadozás, illetőleg relativ sűrűségi ingadozás középnégyzete

$$\overline{\varepsilon_V^2} = \overline{\varepsilon_S^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 e^{-\frac{n_1}{2} \eta^2} d\eta}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n_1}{2} \eta^2} d\eta} = \frac{1}{n_1},$$

a mi a (9)-el és a közvetlen valószínűségszámítási eljárás rendjén nyert értékkel megegyezik.

A relativ energiaingadozás középnégyzete a V_1 térfogatrészen tehát²

$$\overline{\varepsilon_E^2} = \overline{\varepsilon_H^2} + \overline{\varepsilon_S^2} = \frac{2}{n_1 q} + \frac{1}{n_1}. \quad (11)$$

¹ $\int_{V_1}^V (p - p_1) dV = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_1 \frac{(V - V_1)^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_1 \frac{(V - V_1)^3}{2 \cdot 3} + \dots$

² A 167-ik oldal jegyzete szerint (11) egyenlet teljesüléséhez szükséges, hogy $\overline{\varepsilon_H} = \overline{\varepsilon_S} = 0$ legyen. A 162-ik oldalon tárgyaltak szerint

$$\overline{\varepsilon_{kH}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon w d\varepsilon = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon e^{-\frac{a}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon = 0,$$

tehát

$$\frac{\overline{\varepsilon_{kH}}}{E_1} = \overline{\varepsilon_H} = 0.$$

A 164-ik oldal szerint

$$\overline{\varepsilon_{kV}} = \sqrt{\frac{n_1}{2V_1^2 \pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v e^{-\frac{n}{2V_1^2} v^2} dv = 0,$$

következőleg $\overline{\varepsilon_S}$ is zéró. A II. részből ugyanez az eredmény következik.

III.

Analógia sugárzási ingadozás és a gáz energiaingadozása között.

Legyen egy egyenletes hőmérsékletű üregünk, melynek falai tükröző felületek és tökéletesen hőáthatatlanok. Vegyük tekintetbe ez üregben jelenlevő fekete sugárzásnak azt a részét, amely a ν és $\nu+1$ rezgési számok közé esik. Tegyük fel, hogy a V_1 térfogatrész az egész üregnek egy rendkívül kicsiny, de mégis oly nagy része, hogy lineárdimenzióihoz képest a kérdéses sugárzás hullámhossza elhanyagolható kicsiny. E feltevések mellett a V_1 térfogatrész sugárzási ingadozásának, illetőleg relativ ingadozásának középnégyzete a BOLTZMANN-féle elv s a PLANCK-féle sugárzási törvény tekintetbe vételével¹

$$\overline{\varepsilon_k^2} = E_1 \left\{ h\nu + \frac{h\nu}{e^{kT} - 1} \right\},$$

illetőleg

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{h\nu}{E_1} + \frac{c^3}{8\pi V_1 \nu^2}, \quad (12)$$

a hol E_1 a V_1 térfogatrész energiáját jelenti egyenletes energiaelosztódás esetén, h univerzális állandót $\left(6,415 \cdot 10^{-27} \frac{\text{g cm}^2}{\text{sec}}\right)$, c a fény légüres térre vonatkozó terjedési sebességét jelenti. Az első tag reciprokok értéke $\left(\frac{E_1}{h\nu}\right)$ a V_1 térfogatrészben levő energiaquantumok átlagos száma. Ha egyenletes hőmérsékletű gázzal töltve gondoljuk a fenti üreget, a V_1 térfogatrészre vonatkozó molekulaszám relativ ingadozásának középnégyzete $\frac{1}{n_1}$, hol n_1 az átlagos molekulaszám. Mondhatjuk tehát, hogy a V_1 térfogatrészben levő energiaquantumok száma bizonyos átlagos érték körül ingadozik, hogy tehát a sugárzás « $h\nu$ » nagy-

¹ L. A. EINSTEIN : Phys. Zeitschr. X. 188. 1. (1909).

ságú energiaquantumokban terjed. A sugárzási ingadozás e részét «quantumingadozás»-nak nevezhetjük. A második tag reciprokok értéke: $\frac{8\pi V_1 \nu^2}{c^3}$ egyenlő a V_1 térfogatrész szabadsági fokai, azaz független koordinátái számának a felével.¹ A sugárzási ingadozás e része az által jön létre, hogy az alkotó hullámok interferencia révén majd erősítik, majd pedig gyöngítik egymást; ezt a részt «HUYGENS-féle ingadozás»-nak nevezhetjük.

Az előadottakból látható, hogy a gáz energiaingadozása a sugárzási ingadozással sok tekintetben analog jelenség. Mindkét ingadozás két független részből áll. A sűrűségi ingadozásnak megfelel a quantumingadozás. A V_1 térfogatrészben levő gázmolekulák száma épen úgy ingadozik középpértéke: n_1 körül, a mint a V_1 térfogatrészben levő quantumok száma ingadozik középpértéke: $\frac{E}{h\nu}$ körül. Úgy a sűrűségi, mint a quantumingadozás középnégyzete független a tekintetbe vett térfogatrész helyétől és alakjától... A hőingadozásnak a HUYGENS-féle ingadozás felel meg. A gázmolekulák változtatják energiájukat az összeütközések következtében, a sugárzásnál az alkotó hullámok változtatják energiájukat az interferencia révén. A relativ ingadozás középnégyzete a megfelelő szabadsági fokot felének reciprokok értékével van meghatározva. Mig azonban a gáz relativ energiaingadozásának középnégyzete (11) szerint a kérdéses térfogatrész átlagos molekulaszámával s a megfelelő szabadsági fokok számával a hőmérséklettől függetlenül teljesen meg van határozva, addig a relativ sugárzási ingadozás középnégyzetének (12) részei a hőmérséklettel változnak és pedig úgy, hogy nagy T vagy kicsiny ν esetében — a RAYLEIGH-féle határesetben — csak a HUYGENS-féle ingadozás, kicsiny T vagy nagy ν esetében — a WIEN-féle határesetben — csak a quantumingadozás veendő tekintetbe.

¹ Feltéve PLANCK szerint, hogy egy rezonátornak két szabadsági foka van. J. H. JEANS a rezonátorok egy szabadsági fokával számol. L. Phil. Mag. X. 91. 1. (1905).

Még egyszer hangsúlyozni óhajtom, hogy a gáz energiaingadozására vonatkozó vizsgálataim a molekulaszám ingadozása révén keltett energiaingadozáson kívül csak a tranzlációs és rotációs energiaingadozásra vonatkoznak. Ingadozási vizsgálataim csak pillanatképeket adnak a gázmolekulák energiáinak elosztódásánál; az összes lehetséges pillanatképekből a közép, illetőleg a közép relativ ingadozás értékét számítottam ki, melyek a nyert eredmények szerint a térfogatrész alakjától, a gázmolekulák minőségétől függetlenek. E tényezőknek az ingadozás középértékére nincsen ugyan befolyásuk, bizonyos feltételeket szabnak azonban az ingadozások sebességére, a melyről egyenleteim semmit sem mondanak.

Dr. Széll Kálmán.

ELEKTROMOS TÉR HATÁSA ÁRAMOT VIVÓ FOLYADÉKHÁRTYÁKRA.

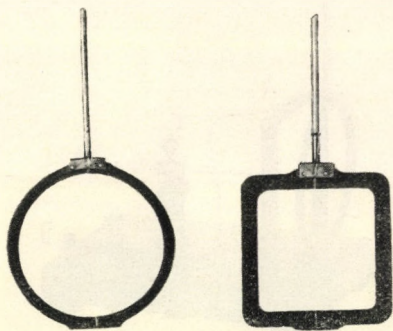
Az alább leírandó kísérleti jelenségekhez engem a következő megfontolások vezettek. Ha valamely ismert jelenségben szereplő testek dimenzióit a lehető legalacsonyabb értékre szorítjuk le, akkor várhatjuk, hogy a jelenség ez egyszerűsített körülmények között olyan szabályosságot mutat, a mely a több dimenzio esetében el van fedve. Az elektromos áramlás törvényszerűségeit AMPÈRE, OERSTED és OHM lineáris vezetőkkel kísérletezve állapították meg és ki tudja meddig kellett volna a törvényszerűségek felismerésére várni, ha a kutatás több dimenziós vezetőkkel történt volna.

Ugyanez a meggondolás vezetett az elektromos endosmosis felfedezéséhez is, a mely jelenség tudvalevőleg akkor jön létre, ha az elektromosságot vezető folyadékot hajszálcővekbe vagy porozus falba zárjuk. A hajszálcőbe zárt folyadékban nyomástöbblet támad valamelyik elektród felé, melynek hatása alatt a folyadék mozog. Ugyanazon okok hatása alatt keletkezik a kataphoresenek nevezett jelenség is, a mely kolloidális oldatokban áll elő, a hol az anyafolyadékban igen apró szilárd alkatrészek vannak eloszolva. Az elektromos feszültség hatása alatt ezek a részecskék meghatározott irányban vándorolnak.

E gondolatok fonalán az a meggyőződés alakult ki bennem, hogy az elektromosság tovavezetésének mechanikájába mélyebb bepillantást nyerhetünk, ha igen vékony folyadékhártyán vezetjük keresztül az áramot. Ilyen folyadékhártya vastagsága megközelíti a supponált molekuláris méreteket és így remélni lehetett, hogy az elektromosság vezetésének folyamata optikailag vagy sajátságos mozgások révén meg lesz figyelhető.

Nagyobb méretű és hosszabb ideig tartó folyadékhártya csak szappanoldatból, tehát tipikus kolloidális oldatból állítható csak elő. Ilyen szappanhártyákon vezettem tehát keresztül az áramot és csak természetes, hogy a hártákban lévő részecskék szabad elektromos töltését külső elektrosztatikai terek alkalmazásával igyekeztem kikutatni. Már az első kísérletnél feltűntek azok a sajátságos örvénylések, melyeket alább bővebben leírok.

A kísérletekhez bizonyos egyszerű eszközökre van szükség. Szükségesek mindenekelőtt keretek, melyek a szappanhártyát tartják. Ezeknek szigetelő anyagból (üvegből, celluloseből, ebonitból) kell készülniök és el kell látva lenniök két-két elektród-



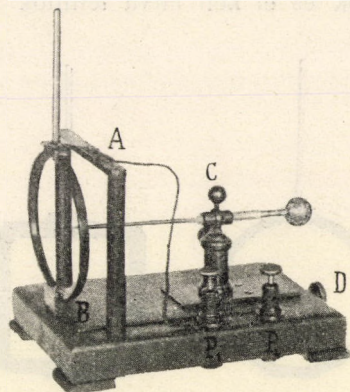
1. ábra.

dal. Különösen alkalmasaknak bizonyultak az 1. ábrából látható köralakú és négyzetes ebonitkeretek (az ebonitlap vastagsága 4 mm, a kör belső átmérője 6·5 cm, a belső négyzet oldala 5·5 cm). Belső szélük ékalakra van kifaragva, hogy a hártának éles és biztos határa legyen. A kereteknek fémnyelük van, a mely az egyik platinelektróddal van vezetékcapcsolatban, a másik elektród szemben van elhelyezve. A keretekhez tartozik egy állvány, a mely nemcsak a keretet tartja, hanem egyzersmind az áram bevezetését is lehetővé teszi. A hártya gyakori elpattanása miatt gondoskodni kell arról, hogy a keret gyorsan és kényelmesen legyen kivehető.

A hártával szemben különböző testeket helyezünk el, melye-

ket elektromos töltéssel látunk el. Ezeket a testeket a következőkben rövidség okáért *szondáknak* fogom nevezni. A legegyszerűbb szonda áll 2—3 mm vastag vezetődrótból, melynek egyik vége hegyes, másik végére pedig gömb van erősítve és a közepén szigetelő nyéllal van ellátva.

A 2. ábrából látható készülék az összes szükséges alkatrészeket magában foglalja (*B* a keret, *A* a keretet tartó állvány, *C* a szonda tartója P_1 és P_2 szorító csavarok révén vezetjük be az áramot a hártába, *D* csavarral a szonda a hártához közelebb vagy távolabb állítható.)



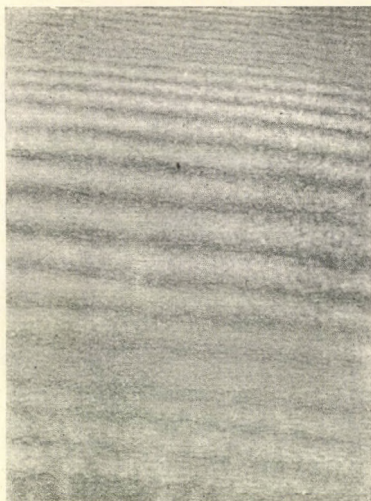
2. ábra.

A szappanoldatot WEINHOLD előírása szerint készítettem. (WEINHOLD: Phys. Demonstrationen 6. Aufl. S. 182.)

A kísérletezéshez a készülék szorító csavarait egy kommutator közbeiktatásával összekapcsoljuk az áramforrás (magas feszültségű battery, városi egyenáramhálózat) sarkaival. A szappanoldatot küvettába öntjük, a keretet bemártjuk és a kifejlődött szappanhártával elhelyezzük az állványban. A készüléket úgy állítjuk fel, hogy a hártya az égboltozat vagy egy mattüveg fényét, mely mögött lámpa van elhelyezve, szemünkbe reflektálja. Ha az áramot zárjuk és a szondához elektromossággal töltött testet közelítünk, létrejönnek az alább részletesen leírandó mozgások.

A jelenséget nagyobb közönségnek vetítve is be lehet mutatni. E célra a vetítőlámpa sugárkúpját gyengén konvergensenre szabályozzuk, rávetítjük a hártýára és a reflektált fényt a vetítőlencsével az ernyőre vetítjük. A tapasztalat azt mutatta, hogy a szappanhártýa így is 5—10 perczig élél.

A legtöbb kísérletnél a budapesti általános villamossági társulat 220 voltos egyenáram feszültségét kapcsoltam össze a hártýa elektródjaival. Magasabb feszültségeket egy magasfeszültségű



3. ábra.



4. ábra.

batteriaból vettem le, melyet e célra magam állítottam össze, úgy hogy a jelenséget egészen 1000 voltnyi elektródfeszültségig tanulmányozhattam. A legkisebb feszültség, melynél a jelenség még biztosan jelentkezik 2—15 volt között változik a hártýa vastagsága és nagysága szerint.

Ha a hártýa függőleges síkban van, akkor az interferencia-vonalak a bemártás után csakhamar kialakulnak és különösen akkor feltűnők, ha homogén vagy csak néhány színképi vonalból álló fényforrást használunk (3. ábra, a mely higanygőzös ívlámpa fényével fotografáltatott). Ha elektromos testet közeli-

tünk, létrejönnek a 4—8. számú ábrákban bemutatott örvénymozgások. A hártya fiatal korában, mikor még nincsenek interferencia-színek, az örvénymozgás csak a «siódzások» (Schlieren) miatt látható (4. ábra). Később a hártya fokozatosan vékonyodik, az interferenciacsíkok fellépnek és a kép úgy a siódzásból, mint az interferenciacsíkokból rakódik össze (5—6. ábra). Ha a hártya megöregszik ($\frac{1}{4}$ —1 óra múlva) a siódzások egészen eltűnnek és a kép tisztán az interferenciacsíkokból



5. ábra.



6. ábra.

áll (7. és 8. ábra). Gyakran megtörténik, hogy a kettős örvény két fele komplementär színekben tündöklök (8. ábra, felvételnél a bal rész kék, a jobb sárga volt).

A kettős örvény középső, egyenes vonalú részében van a folyadéknak legnagyobb sebessége. Az elektród feszültség növelése növeli ezt a sebességet is és növeli az örvény kiterjedését. Ugyanezzel a hatással jár a szondán lévő feszültségnek a megnövelése. E mennyiségek közötti kvantitatív törvényt a hártya folyton változó adatai miatt még nem sikerült megállapítanom. Ha az áram irányát megváltoztatjuk, az örvénylés

iránya rögtön az ellenkezőbe csap át. Ugyanez történik, ha a szondának ellenkező töltést adunk.

Különösen érdekes az örvények játéka, ha valamely elektromozott testtel az elektromosságot a szondában megosztjuk. A hártya a dörzsöléssel elektromossá tett üveg vagy gyantarúd megosztó hatását több méter távolságból megérzi. Ha a szondának már van töltése, a mely bizonyos irányú örvénylést okoz, akkor egy másik elektromozott testnek közelítése ezt az örvényt



7. ábra.



8. ábra.

nagyobbitja, kisebbíti vagy ellenkező irányba tereli, a szerint milyen és mekkora az illető testen az elektromosság feszültsége a hártéhoz képest. Ha az egyik oldalon hegyes, a másik oldalon gömbölyű végű szondával végezzük a kísérleteket, akkor a csúcsok szívó hatása érdekes örvényjátékokban jelentkezik.

Meg kell jegyezni, hogy örvények akkor is létrejönnek, ha a szondának nincs töltése, hanem vezető összeköttetésben van a Földdel.

Annak a szerepnek kikutatására, melyet a hártéhoz adsor-

beált légrétegek a jelenség létrehozásában visznek, az egész készüléket a légszivattyú harangja alá helyeztem, az elektródokba és a szondába a feszültséget kívülről vezettem be. A jelenség 15 mm vakuumig épúgy folyt le, mint a szabad levegőn. Eddig a ritkítási fokig a hártya elég jól tartotta magát, nagyobb vakuumok esetében azonban csakhamar elpattant.

A kísérleti feltételeket ezenkívül is különbözőképen változtattam. Elektród nélküli keretekbe a feszültséget két vékony platinadrót segítségével a hártya tetszésszerű helyére vezettem be. Vezető anyagból készítettem a keretet, amely így maga egyik elektród gyanánt szerepelt. Hosszú és igen keskeny kereteket is használtam. Minden fajta keretet vízszintes, függőleges és ferde helyzetbe is állítottam. A jelenség minden körülmények között tapasztalható volt.

A jelenséget vastagabb folyadékrétegekben is lehet létesíteni. Egyetlen szükséges feltétel úgy látszik az, hogy a folyadékréteg elektromos ellenállása aránylag nagy legyen, úgy hogy benne kis távolságokban nagy feszültségesések jöjjenek létre. Ha porcelláncsészébe (12×18 cm) kútvizet öntünk, úgy hogy $\frac{1}{2}$ cm-es réteg keletkezzék és ebbe 220 volt feszültséget elektródok révén becsatolunk, akkor egy elektromozott test közelítése létrehozza a kettős örvényt; a folyadék mozgása azonban igen lassú és nehezen megfigyelhető.

A kísérleti feltételeknek sokféle változtatásával az volt a célom, hogy a különféle körülmények között létrejövő folyadékmozgásokat egyetlen tapasztalati törvényben írjam le. Minden tapasztalat azt mutatta, hogy az örvénymozgás tulajdonképeni forrása egy kis felületelem a kettős örvény egyenesvonalú részének közepén. E helyen kell keresni a mozgató erőt, a mely a folyadéktömegnek mozgásmennyiséget ad. Maga a kettős örvény nem elektromos eredetű tünet; hogy a folyadék egyenes irányú mozgásából örvény keletkezik, az tisztán a folyadék-hártya mechanikájának folyománya. Éppen ilyen örvények keletkeznek akkor is, ha a hártya egy részének más úton — például ráfuvással — adunk mozgásmennyiséget. Figyelmünket

tehát erre a felületelemre kell fordítanunk, melyet rövidség okáért *örvényforrásnak* neveztem el. Az örvényforrás mindig a hártjának a szondához legközelebb eső részében van.

Milyen a folyadékmozgás iránya az örvényforrásban? Ennek megállapításához meg kell gondolnunk, hogy a hártjában folyó áram felületi áram, melyet áramfonalak rendszerére bonthatunk fel. A hártja ugyan nem homogén szerkezetű, mindazonáltal az áramvonalakat nagyjából megszerkeszthetjük. Ezt téve kitűnt, hogy *a folyadék az örvényforrásban mindig az áramvonalak irányában mozog*. A kérdés csak az, hogy a két lehetséges irány közül melyikben?

Ennek megállapításához tekintetbe kell vennünk a szondától létesített elektromos tér erővonalait, melyek az áramforrás és a szonda között feszülnek ki. A folyadékmozgás irányát az a feszültségkülönbség határozza meg, a mely az erővonalak két vége, vagyis a szonda és az örvényforrás között van. *A folyadék az áramfonalakban a pozitív áram irányában mozog, ha a feszültség az örvényforrásban magasabb, mint a szondán*. Ellenkező esetben a mozgás is ellenkező irányú.

Az áramfonalakat folyadékfonalaknak is képzelhetjük és akkor a törvényt következőképen mondhatjuk ki: *ha elektrostatikai erővonalak elektromos áramot vivő folyadékvonalakat metszenek, akkor a folyadék a pozitív áram irányába eső (anódtól katód felé tartó) vagy ellenkező irányú mozgásmennyiséget kap, a szerint, a mint az erővonalak a folyadékból indulnak ki vagy a folyadék felé tartanak*.

Még rövidebb és egyszerűbb fogalmazást kapunk, ha a szonda elektromos töltésének megosztó hatását vesszük tekintetbe: *a folyadék mindig abban az irányban mozog, a melyben a folyadék elektromótoros ereje a kötött (ellenkező előjelű) megosztásbeli elektromosságot mozgatja*. Ha például a szonda elegendő magas feszültségű negatív elektromossággal van töltve, akkor a folyadék a pozitív áram irányában mozog.

A leírásból látható, hogy e jelenség szoros kapcsolatban van az elektromos endosmosis-sal. Mindkét jelenségnél folyadék

mozog az árammal egyező, vagy azzal ellenkező irányban. Az endosmoszisznál a folyadék és a kapillaris cső mineműsége dönti el, hogy a mozgás melyik irányban történik, a mi jelenségünk-nél pedig a külső elektrosztatikai tér iránya.

QUINCKE és HELMHOLTZ az elektromos endosmoszis jelenség megmagyarázásához abból a hypotheziszból indultak ki, hogy a folyadék és a kapillaris cső között elektromos kettős réteg képződik, minek folytán a folyadékban az elektromos sűrűség megváltozik. A mi jelenségünk is hasonló alapon magyarázható meg a nélkül, hogy a kettős réteg hypotheziséhez folyamodni kellene. A külső elektrosztatikai tér megosztja a hártya elektromosságát, minek folytán az OHM törvény követelte elektromos sűrűségeloszlás megváltozik. A kötött megosztásbeli elektromosság összegyűl azon a helyen, melyet örvényforrásnak neveztünk. Ezt az elektromosságot mozgatja az illető helyen uralkodó elektromótoros erő.

Az elektrónhypothesis alapján azt kell képzelnünk, hogy a külső elektrosztatikai tér az ellenkező előjelű ionokat gyűjti össze az örvényforrás helyén. Persze ezek nem pusztá elektrónok, nem is atomokhoz kapcsolt elektrónok, hanem nagyobb terjedelmű komplexumok. Feltehetjük, hogy a szappanoldatban, mint tipikus colloidalis oldatban finoman eloszlott szilárd alkatrészek tartalmazzák az elektrónokat. Ezt a felfogást igazolja az a körülmény, hogy a hártya idősebb korában az örvények nem folytonos szerkezetet mutatnak.

A másodpercenként áthaladó elektrónok száma az örvénymozgás következtében nem változik. A leggondosabb észleléssel sem tudtam az áramintenzitásban az örvénymozgás következtében beálló változást megfigyelni. A külső elektrosztatikai tér tehát az ionok mozgásmennyiségének összegében változást nem hoz létre. Az örvénymozgás az ionok vándorlásának egy meghatározott irányba terelt része.

Mikola Sándor.

PHYSIKAI SZEMLE.

Az elektron töltésének meghatározására vonatkozó főbb vizsgálatok.

Mint ismeretes, az elektronelmélet szerint a negatív elektromos töltés legkisebb, többé fel nem osztható részekből, elektronokból áll. Minden negatív töltés az elektron többszöröse. Ezért az elmélet egyik alapvető kérdése: Mekkora az elektron töltése? A kérdés megoldására többféle módszerünk van annak megfelelően, hogy elektronokat többféleképpen állíthatunk elő. Tudjuk, hogy az elektrolízisnél minden egy vegyértékű kation egyenlő töltést hordoz. Ez az elektron. Ha a levegőt ionizáljuk, akkor a molekulákból elektronok lépnek ki. WILSON «felhő módszere» ezeket használja a töltés meghatározására. Egyes radioaktív anyagok β -sugarakat bocsátanak ki, ezek szerkezetükben azonosak a katodsugarakkal, tehát gyorsan mozgó elektronok. Az α -sugár két pozitív elemi töltéssel ellátott helium-atom, vagyis olyan helium-atom, a mely két elektront veszített. Ennélfogva a radioaktív jelenségek is módot nyújtanak az elektron töltésének megállapítására. Evvel nem merítettük ki az elektron előállításának módjait, mert a fényelektromos jelenségnél, a thermoionizálásnál és egyes vegyi folyamatoknál ugyancsak szabad elektronok keletkeznek, de ránk nézve jelenleg csak az imént felsorolt három módszer jön tekintetbe. Maga az a körülmény, hogy az elektron töltését többféleképpen határozhatjuk meg, annyiban fontos, hogy az értékek esetleges egyezése az elméletnek legjobb támasza.

De honnan tudjuk, hogy az elemi töltés mindegyik esetben ugyanaz? Enélkül meg lehet határozni az elektrolízis, vagy a gázionizálás elektronjainak töltését, de nem az elektronét. Miféle tapasztalatokra támaszkodunk, ha ezeket egyenlőknek vesszük? A katodsugarakat régóta úgy magyarázzuk, hogy negatív töltésű részecskék. A részecske töltésének (e) és tömegének (m) viszonya (e/m) a fajlagos töltés. Bármilyen anyagú a katód, a belőle kiinduló sugarak fajlagos töltése mindig ugyanakkora.

Ebből sejtették, hogy a részecskék megegyező tömegűek és megegyező töltésűek. Az elektrolizisnél szintén felmerült egy töltés, a mely az elektrolit anyagától függetlenül mindenütt egyenlő, t. i. az egy vegyértékű atom töltése. Minden más atom töltése ennek egészszámu többszöröse. Nem látszott valószínűnek, hogy két különböző olyan elemi töltés van, a mely minden anyagban feltalálható, azért az egy vegyértékű atomnak és a katodsugár részecskének töltését egyenlőnek vették fel. A gázok ionizálásánál keletkező negatív részecskék töltése ismét független a gáz anyagi minőségétől, azért ennek töltését is akkorának vették, mint az előbbi kettőt.

A közvetlen bizonyítékot TOWNSEND adta. FARADAY törvényéből tudjuk, hogy 1 gramm-molekulányi elektrolit felbomlásakor mindig 96550 coulomb töltés áramlik át. Legyen N az AVOGADRO-féle szám, tehát az 1 gramm-mol.-nyi tömegben normális nyomás és hőmérséklet mellett a molekulák száma és e az egy vegyértékű atom töltése. Akkor

$$Ne = 96550 \text{ coulomb.} \quad (1)$$

TOWNSEND az által, hogy a gázelmélet törvényeit a gázionokra alkalmazta, a következő eredményre jutott:

$$Ne = P_0 \frac{u_0 v}{D},$$

P_0 az 1 gr.-mol.-nyi gázionok részleges nyomása, u_0 az ion sebessége egységnyi erősségű elektromos térben, v az 1 gr.-mol. gáz térfogata, D a diffúzió együttthatója, e pedig az ionizált gáz egy negatív részecskéjének töltése. A jobboldalon levő minden mennyiséget meg lehet mérni. Ekkor TOWNSEND az Ne szorzat számára az előbbivel jól egyező értéket nyert. Eszerint a gázion töltése megegyezik az elektrolitikus ionéval.¹

Az (1) egyenlet módot nyújt e meghatározására, ha N értékét ismerjük. Ezt a feladatot többféleképen tudjuk megoldani. Az első módszert a gázelméletből meríthetjük. Ha U^2 a gázmolekulákban a sebesség négyzetének átlagos értéke T abszolút hőmérsékleten és M az 1 gr.-mol. tömege, akkor ennek az 1 gr.-mol.-nak kinetikus energiája:

$$\frac{1}{2} MU^2 = \frac{3}{2} RT.$$

¹ CAMPBELL: Moderne Elektrizitätslehre, Dresden u. Leipzig, 1913, 96. 1.

Ha ebből U -t meghatároztuk, akkor a molekulák átlagos sebessége:

$$V = \frac{12}{13} U.$$

A molekula szabad úthossza (L) az a távolság, a mennyire a molekula mozoghat, míg egy másikkal összeütközik. Nagyságára a viszkozitásból következtethetünk.

Két, egymással érintkező gágréteg az elválasztó felülettel párhuzamosan, különböző sebességgel mozog. Ekkor a gyorsabban mozgó rétegre a mozgással ellenkező irányú erő (P) hat, a mely a mozgást lassítja, a másik rétegre pedig ugyanakkora, a mozgást gyorsító erő hat. Koordináta-rendszerünk X -tengelyét az elválasztó felületre merőlegesen állítjuk. Vegyünk fel dx távolságban két pontot úgy, hogy a pontok a két különböző gázba essenek. Ha ezek között dv sebességkülönbség van, akkor

$$P = \eta f \frac{dv}{dx},$$

η a viszkozitás együtthatója. A kinetikus gázelmélet szerint

$$\eta = \frac{1}{3} L V d,$$

d a gáz sűrűsége. Ha D a molekuláris átmérő, és v a gramm-molekula térfogata, akkor a

$$\pi N D^2 = \frac{v}{L \sqrt{2}}$$

$$\pi N D^3 = \frac{3b}{2}$$

egyenletrendszer módot ad N és D kiszámítására. b a van der WAALS-féle egyenlet állandója. Ilyen úton azt találjuk, hogy

$$N = 6 \cdot 2 \cdot 10^{23}$$

és

$$e = 4 \cdot 7 \cdot 10^{-10} \text{ elektrosztatikai egység.}$$

A második eljárás a BROWN-féle mozgás megfigyeléséből ered. BROWN észrevette, hogy ha folyadékban apró szilárd részek lebegnek, akkor a részek folyton ide-oda mozognak, pályájuk egészen szabálytalan tört vonal. Akármennyire csökken a megfigyelések időköze, még csak közelítőleg sem kapunk olyan görbét, a melynek egyes pontjaiban érintőt lehetne szerkeszteni. A jelenséget úgy magyarázzuk, hogy a részecskét a molekulák ütközése ide-oda löki. Tulajdonképpen mi nem a részecske pályáját látjuk, hanem a pálya vetületét abban a síkban, a melyre a

mikroszkópot beállítottuk. Legyen X^2 a t időközök alatt megfigyelt elmozdulások négyzetének átlagos értéke, akkor a tapasztalat szerint $\frac{X^2}{t}$ állandó. EINSTEIN elmélete szerint:

$$\frac{X^2}{t} = 2D,$$

D a diffúzió együtthatója. Ha a lebegő rész a sugarú gömb,

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi a\eta},$$

tehát

$$\frac{X^2}{t} = \frac{2RT}{N} \frac{1}{6\pi a\eta}.$$

A mérések $N = 6.88 \cdot 10^{23}$ eredményre vezettek.

A lebegő részeknek magasság szerinti eloszlásából szintén következtethetünk N értékére. Tudjuk, hogy a levegő sűrűsége mértani sor szerint fogy, ha a magasság számtani sor szerint növekszik. A molekulák száma az egyes rétegekben a sűrűséggel egyenesen arányos, tehát a sűrűségek viszonya helyett a molekulák számának viszonyát vehetjük. Megfigyelték közvetlenül a folyadékban lebegő részek eloszlását és azt találták, hogy az egymás fölött levő rétegekben a részek száma szintén mértani sor szerint csökken. De ekkor a lebegő részekre a gázok törvényeit alkalmazhatjuk. Ha h magassággal emelkedünk, akkor a részek számának viszonya a felső és alsó rétegben:

$$\frac{n'}{n} = 1 - \frac{N}{RT} m \left(1 - \frac{d}{D} \right) gh,$$

m a lebegő rész tömege, D a sűrűsége, d a folyadék sűrűsége, g a nehézségi gyorsulás. Ezt az egyenletet csak akkor lehet alkalmazni, ha a részek — éppen úgy, mint a levegő molekulái — egymás között egyenlők. Ebből az egyenletből N értékét meghatározhatjuk, ha a benne előforduló többi mennyiséget megfigyelés útján ismerjük.

PERRIN főleg gummigutta- és masztix-részeket vizsgált. A gummiguttát vízben szétdőrszölte úgy, mint a szappant szoktuk. A masztixot alkoholban oldotta. Az oldat kezdetben igen különböző részeket tartalmazott. Centrifugálásnál először a nagyobb részek rakódtak az edény falára. Frakcionált centrifugálással végül olyan oldatot nyert, a melyben a részek megegyező nagyságúak. m meghatározása végett a részecske

sugarát kell ismernünk. Evégből PERRIN vékony réteget üveglapra terített. Egyes helyeken a gömbök összefüggő lánczalakban rakódtak egymás mellé. Mikroszkóp alatt meg kell mérni a láncz hosszát és meg kell számlálni a benne levő részek számát. A részecske sugarát STOKES egyenletével is meghatározhatjuk. Az egyensúlyi eloszlás beállta előtt a részecske a sűrűlódás folytán egyenletesen esik. A lefelé ható erő $\frac{4}{3}\pi a^3 (D-d) g$, a sűrűlódás pedig $6\pi\eta av$, v a részecske esésének sebessége. Tehát

$$6\pi\eta av = \frac{4}{3}\pi a^3 (D-d) g.$$

A sebességet közvetlenül mikroszkopikus megfigyeléssel kell meghatározni. A gondos mérések sorozatából $N = 6 \cdot 82 \cdot 10^{23}$.

Még csak azt a módszert említtem N meghatározására, a mely a radioaktív α -sugárzásra támaszkodik. Ha α -sugár részecskék cínkszulfid-ernyőre érnek, apró villanások keletkeznek. Ez a szcintillálás. Ezt a jelenséget már felfedezése idején úgy magyarázták, hogy minden α -részecske egy-egy villanást okoz és fordítva, minden villanás azt mutatja, hogy az ernyőt egy α -részecske érte. Ennek helyességét REGENER úgy mutatta ki, hogy az α sugarak számát elektrometrikus úton is meghatározta. Az α -sugárzó anyagot üvegcsőbe helyezte, a mely keskeny nyíláson át szélesebb edénybe vezetett. Az α -sugarak ezen a nyíláson keresztül a szélesebb edényben levő sűrítő lapjai közé jutottak. A sűrítőlapok az edénybe nyúló fémvezeték segítségével elektrometerrel érintkeztek. Valahányszor egy α -részecske a nyíláson áthatol, ionizálja az útjába eső levegőt, a keletkező ionok és elektronok az ellenkező töltésű sűrítőlaphoz vándorolnak, csökkentik a sűrítőlap töltését, tehát az elektrometer tűje kitér. Az ionok töltésének közömbösítése után a külső állandó feszültség folytán a lap eredeti töltését visszanyeri és így a tű előbbi egyensúlyi helyzetébe tér. A tű minden kilengése egy-egy α -sugár részecske áthatolását jelenti. Ha a tű járását fotografus-lemezre iratjuk, akkor csipkézett vonalat kapunk, melyről az α -részecskék számát leolvashatjuk. Még csak azt kell tudnunk, hányadrésze a nyílás területe annak az egész gömbfelületnek, a mely a radioaktív anyagot körülveszi, akkor már ismerjük az összes kibocsátott α -sugarak számát. A szcintillálással és az elektrometrikus úton megolvasott α -sugarak száma egyenlő volt. 1 gramm rádium másodpercenként $3 \cdot 4 \cdot 10^{10}$ α -részecskét boesát ki. Ha pedig a rádium bomlástermékeivel egyensúlyban van, akkor ez a szám $13 \cdot 6 \cdot 10^{10}$ -re emelkedik.

RUTHERFORD említett felfogása egyszerűen megmagyarázza, miért fejlődik minden α -sugárzással együtt helium. Minden kibocsátott α -részecskének egy helium-atom felel meg. SODDY-nak és másoknak többszöri megfigyeléséből tudjuk, hogy 1 gr rádium 1 év alatt 158 mm^3 heliumot fejleszt, tehát ismerjük az atomok számát ebben a térfogatban. (A helium-molekula egy atomú.) Az így nyert eredmény: $N = 6.4 \cdot 10^{23}$.

Folytathatnám a módszerek felsorolását, mert ma körülbelül 15 eljárást ismerünk.¹ De ezekből is világos már, hogy igen különböző jelenségkörökből indulhatunk ki és a nyert eredmények egymás között jól egyeznek. Így az elektron töltése: $e = 4.7 \cdot 10^{-10} \text{ e. szt. e.}$ Ez az úgynevezett «klasszikus» érték.

WILSON közvetlen módszert állított fel e meghatározására. Ez a «felhő-módszer». BROGLIE kimutatta, hogy ha porral, vagy füsttel telt térben vízpára lecsapódik, a vízcseppek főleg a por-, vagy füstreszkek körül keletkeznek. A szilárd részek a vízgömbök magjai. WILSON C. T. R. 1897-ben kimutatta, hogy az ionok e tekintetben éppen úgy viselkednek, mint a porszemek. A lecsapódást úgy idézte elő, hogy a vízgőzzel telített levegőt hirtelen nagyobb térfogatra engedte. A lehülés folytán a pára egy része lecsapódott, felhő keletkezett. WILSON mindenekelőtt gondosan megtisztította a teret portól. Evégből még az ionizálás előtt többször felhőt állított elő. BROGLIE megfigyelése szerint a cseppek a porszemeken keletkeztek. Ha megvárjuk, míg a cseppek leszállnak, akkor az eljárás néhányszori megismétlése után a levegő portól mentes. A megtisztított tér levegőjét WILSON X-sugarakkal ionizálta. Mikor a levegőt annyira kiterjesztette, hogy a végső és a kezdetbeli térfogat viszonya 1:22, a lecsapódás megkezdődött, 1:25-szörös kiterjedésnél már felhő keletkezett. Vajjon valóban az ionokon csapódik le a vízgőz? WILSON ezt külön bebizonyította. A kiterjesztés előtt néhány másodpercczel ionizálta a levegőt, akkor a kiterjesztés alkalmával hiányzott a felhő. Az ellenkező töltésű ionok és elektronok ugyanis, ha az ionizáló ok megszűnik, egymással igen gyorsan egyesülnek, a levegő kiterjedésekor tehát már nem voltak töltött részecskék a térben, a porszemek eltávolítása pedig a lecsapódást késlelteti. Ezt az okoskodást az ionok egyesülésének meggátolásával ellenőrizhetjük. A térbe megtöltött sűrítőt állítunk, mely

¹ Ezeknek rendszeres ismertetése megtalálható PERRIN, Die Atome, Leipzig u. Dresden, 1913, cz. munkájában.

két párhuzamos fémlapból áll. Az elektromos töltésű részecskék az ellenkező töltésű sűrítőlap felé haladnak és csak akkor egyesülnek, ha útjuk közben egymással véletlenül találkoznak. Mikor a levegő elektromos térben terjedt ki és ionizálva volt, a felhő előállott. Az X -sugarak erősségének növelésekor és nagyobb kiterjedésnél a felhő sűrűbb és kiterjedtebb.

A részecskék vándorlásának irányából megítélhetjük, hogy a vízcsepp ion, vagy elektron körül keletkezett-e. Ekkor kitűnt, hogy a lecsapódás először a negatív elektronokon történik és csak azután a pozitív ionokon (WILSON 1900). 1·25-szörös kiterjedésnél a felhő csak negatív elektronmagokat tartalmaz. Pozitív ionokon a lecsapódás 1·28-szoros kiterjedésnél kezdődik, felhő pedig 1·31-szoros kiterjedésnél áll elő.

THOMSON J. J. használta fel először ezt a jelenségét az elektron töltésének megméréseire. Kössük össze a sűrítő lapjait elektrometerrel. A felhő magjai ellenkező töltésükkel csökkentik a sűrítőlap töltését. A töltés kisebbedését az elektrometerrel meghatározzuk. Ez természetesen a felhőben levő összes részek töltése. A részek számának megállapítása végett THOMSON megmérte a lecsapódott víz tömegét, azonkívül egyetlen vízgömb tömegét. Az utóbbit úgy, hogy STOKES törvénye alapján a részecske sugarát (a) meghatározta. A kis gömbök súlyuknál és a sűrűdásnál fogva egyenletesen esnek. A gömb súlya (mg) tehát egyenlő a sűrűdással:

$$mg = 6\pi a \eta v,$$

η a viszkozitás együtthatója, v a mozgás megfigyelt sebessége. Ha d a gömb sűrűsége, akkor a sugár meghatározására a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{4\pi a^3}{3} dg = 6\pi a \eta v$$

v mérése úgy történik, hogy mikroszkópban megfigyeljük, hogy a részecske előre kijelölt utat mekkora idő alatt tesz meg. A cseppek sűrűségét THOMSON a vízával egyenlőnek tekintette. Méréseinek eredménye 6·8 és 3·4-szer 10^{-10} e. szt. e. közt ingadozott.

De ennek a módszernek több lényeges hibája van. Kétes mindjárt a kiindulópontja, hogy minden cseppnek egy elektronja van és hogy minden ion, a mely a sűrítőhöz ér, vízcsepp magja. Ma már tudjuk,

hogy ez valóban helytelen. QUINCKE¹ kimutatta, hogy a felhőnek minden cseppje több, talán sok iont is tartalmazhat. A felhőket lefotografálta. A sokféle alak között talált olyan cseppeket, melyekből jóval kisebb gömbök indultak ki. Ezek a kis gömbök csőszerűen egymás mellé helyezkednek. Mindegyiknek volt töltése, tehát az eredeti gömbnek több iont kellett magában foglalnia. Helytelen az is, hogy a felhő egyenlő nagy részekből áll. Azonkívül a részek nem állandó sebességgel esnek és nem függőleges pályán, mert ezt a pályát a levegő áramlása és talán a megvilágítás is zavarja. A távcsőben tehát nem a valóságos utat látjuk, hanem ennek vetületét a cső tengelyére merőleges síkban. Ezért THOMSON mérései nem megbízhatók.

WILSON H. A. (1903) jutott arra a gondolatra, hogy a felhőcseppeket külön figyelje meg. Egyúttal az előbbi módszert egyszerűsítette. A vízgömb először csak saját súlyánál fogva esik, a sűrítő nincs megtöltve. Ekkor

$$mg = 6\pi\alpha\eta v_1. \quad (2)$$

Elektromos térben egyes cseppek, melyeknél az elektromos és a nehézségi erő iránya megegyezik, még nagyobb sebességgel mozognak lefelé. Más cseppeknél a sebesség csökken. Ezeknél a lefelé irányuló súly nagyobb a felfelé ható elektromos erőnél. Lesznek olyan cseppek, a melyek megállapodnak. Végül találkoznak olyanok, a melyek felfelé mozognak. Az E erősségű térben az elektronra ható elektromos erő Ee , a mozgató erő tehát $Ee - mg$. Ekkor

$$Ee - mg = 6\pi\alpha\eta v_2.$$

Ebből a két egyenletből

$$e = m \frac{g}{E} \frac{v_1 + v_2}{v_1}.$$

A részecske tömegét (m) ismét (2) segítségével kell meghatározni. Tehát STOKES törvényét most sem nélkülözhetjük. A nyert értékek nem éppen jól egyeznek. Sokszor több, mint 80%-kal egymástól eltérő értékekből vettek közepet és így jutottak arra az eredményre, hogy

$$e = 4.7 \cdot 10^{-10} \text{ e. szt. e.}$$

¹ Ann. Phys., 46., 1915, 39—67. lap.

EHRENHAFT-é ¹ az érdem, hogy ezt a módszert még tovább fejlesztette. Főleg az indította ezekre a kutatásokra, hogy eddig igen különböző értékek közepét vették. A töltést és a tömeget ugyanazon részecskén határozta meg. BREDIG módszere szerint fémelektrodok között ívfényt keltett. Ekkor az elektrodokról igen kis, töltött részek válnak le. Ezek közül néhányat levegőárammal a sűrítő két lapja közé vezetett. Először a nagy és fényes részek estek le, azután a kisebbek és pedig nagyságuknak megfelelő sebességgel. A megfigyelt platina-részek sugara a STOKES törvényén alapuló mérések szerint $4.42 \cdot 10^{-6}$ és $14.7 \cdot 10^{-6}$ cm közt változott. Ezenkívül ezüst-, arany- és foszfor-részeket vizsgált. EHRENHAFT szempontjából a legérdekesebb az igen kis részek megfigyelése volt. Ezeknek ugyanis kicsi a kapacitásuk és így azt várhatjuk, hogy megegyező viszonyok között kisebb lesz a töltésük. Ekkor EHRENHAFT az elektron eddigi nagyságánál jóval kisebb töltésmennyiségeket talált, egyes esetekben a töltés az $1 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e.-en is alul maradt. A talált töltéseket nagyságuk szerint csoportosította. Ekkor kitűnt, hogy az elektron eddigi töltése és ennek egészszámú többszöröse sokkal több mérésnél adódott ki, mint más értékek. De ennek okát EHRENHAFT nem tudja megadni. A legkisebb töltést az egyik ezüstgömbön találta, ez a töltés $5 \cdot 10^{-11}$ e. szt. e. Mindebből EHRENHAFT azt következteti, hogy a természetben az elektron eddigi töltésénél jóval kisebbek is vannak. Ha tehát az elektromosság valóban részekből áll, akkor az elemi töltésnek $1 \cdot 10^{-10}$ e. st. e.-nél kisebbnek kell lennie.

PRZBRAM ² is alkalmazta ezt a módszert foszforrészekre. Igen különböző töltéseket talált, köztük lényegesen kisebbeket az elektron eddigi elfogadott töltésénél, de az eredmények eloszlásában ismét mutatkozott az előbb említett sajátság. A sűrűsödés helyeit az elektron eddigi töltésének 13-szorosáig lehetett felismerni.

EHRENHAFT eredményei érthetően nagy feltűnést keltettek és hosszú, máig eldöntetlen vitára adtak alkalmat. Azok, a kik az elektron töltésének eddigi értéke mellett megmaradtak, joggal hivatkoztak EHRENHAFT értékeinek különös eloszlására és a többi értéket méréshibáknak tulajdonították. De akkor hol a hiba? Lehet STOKES egyenletének alkalmazásában. Ez t. i. csak akkor érvényes, ha a részek gömbalakúak és a gömb sugara a szabad úthossz mellett elég nagy. De EHRENHAFT igen kis ré-

¹ Phys. Zeitschr., XI. 1910. 619. és 940. lap.

² U. o. 630. lap.

szeket figyelt meg, ultramikroszkopikus nagyságúakat. Ezért mindjárt első közleményében kiterjeszkedett a SROKES-féle egyenlet alkalmazhatóságának kérdésére. Azt találta, hogy még ha ez az egyenlet nem is szigorúan érvényes, akkor sem okozhat olyan nagy hibát, hogy a nagy eltéréseket így meg lehetne magyarázni.

MILLIKAN ¹ többféle javítással megismételte a méréseket. Olajból porlasztóval apró gömböket fú a vízszintesen álló sűrítő fölé. A sűrítő felső lapjának igen kis nyílásán át néhány gömb a lapok közé került. Ekkor a nyílást a levegő áramlásának elkerülése végett befedte. A gömböcskék a kifúvásnál dörzsölés folytán töltést nyernek. Mielőtt a felfelé emelkedő részecske a sűrítőlapot elérte volna, MILLIKAN a feszültséget kikapcsolta úgy, hogy a gömb ekkor súlyánál fegva esni kezdett. Ugyanazt a részecskét hosszú időn át figyelte, a csepp majd az elektromos térben felfelé mozgott, majd pedig csak súlyánál fogva lefelé. Ha a gömb megfigyelés közben új töltést nyert, akkor sebessége hirtelen megváltozott. MILLIKAN ezeket a részeket tovább figyelte, mert hiszen a töltés változása az elektron-elmélet szerint szintén csak az elektron töltése, vagy ennek egészszámú többszöröse lehet. Olaj-, higany- és glicerin-cseppeket vizsgált, tehát igen különböző anyagokat, de a töltés mindig egészszámú többszöröse volt egy legkisebb töltésmennyiségnek, a mely MILLIKAN mérései szerint $4.9 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e. Több, mint ezer olyan esetet figyelt meg, a mikor töltés közben változott, de egyetlen olyant sem talált, a hol a változás az előbbi elemi töltéstől, vagy egészszámú többszörösétől eltért volna. A sebességből a sugarat nem SROKES egyenletével határozta meg, hanem ennek CUNNINGHAM által javított alakjával. MILLIKAN ugyanis minden cseppből annyiszor határozta meg e -t, a hányszor a csepp töltése változott. Feltűnt, hogy e -nek azok az értékei, a melyekre ugyanaz a csepp vezetett, egymás között mindig jól egyeztek, de a különböző cseppekből nyert értékek eltértek, még akkor is, ha a cseppek a nehézségi erő hatása alatt megegyező sebességgel estek. MILLIKAN egy esetben két, majdnem egyenlő cseppeket vizsgált. A nehézségi erő hatása alatt megegyező sebességgel estek. Az egyiknél az elektromos tér majdnem kétszer erősebb volt, mint a másiknál, az e értéke mégis nagyon jól egyezett. Nagyobb sebességű cseppek ellenben nagyobb e értékre vezettek. Mindez azt mutatja, hogy SROKES egyenlete ilyen kis cseppekre már

¹ Phys. Zeitschr., XI. 1911. 1097. l.

nem érvényes. Ezért MILLIKAN a CUNNINGHAM-féle egyenletet használta. A mozgató erő nem $6\pi\eta av$, hanem

$$P = 6\pi\eta av \left(1 + 1.63 \frac{L}{a} \frac{1}{2-f} \right)^{-1},$$

f a rugalmas ütközések számának viszonya az összes ütközésekhez, a melyeket a részecske szenved, L a szabad úthossz. Ha $f = 0$, vagyis minden ütközés rugalmatlan, akkor

$$P = 6\pi a \eta v \left(1 + A \frac{L}{a} \right)^{-1},$$

A állandó számot jelent. MILLIKAN az utóbbi egyenletet használta. Ekkor e -nek előbbi értékét még $\left(1 + A \frac{L}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$ tényezővel kell szorozni. A értéket külön megfigyelésből kell kiszámítani. MILLIKAN azt találta, hogy $A = 0.815$.

SCHIDLÖF és MURZINOWSKA¹ szintén megvizsgálták CUNNINGHAM egyenletének alkalmazhatóságát. A cseppek sugara 0.8 és 2.1μ közt változott. Két különböző sugarú csepp megfigyeléséből levezették az AL szorzat értékét. L a megfigyelések alatt állandó, mert a hőmérséklet és a nyomás ugyanaz marad. 730 mm nyomásnál és 19° C-nál $L = 9.5 \cdot 10^{-6}$ cm. $AL = 8.288 \cdot 10^{-6}$, tehát $A = 0.874$. Az AL szorzat értékei a különböző megfigyeléseknél csak igen kis határok között változtak. Ez azt mutatja, hogy CUNNINGHAM egyenlete a megfigyelt olajcseppeknél alkalmazható. A értékéből viszont az következik, hogy az ütközések közel rugalmatlanok. Az így nyert értékek felhasználásával $e = 4.738 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e.

Ezek az ellenvetések arra indították EHRENFEST-ot,² hogy vizsgálatait megismételje. De ha a sugarat CUNNINGHAM egyenletével számította, az elektron töltésére még kisebb értéket kapott. STOKES egyenletével számítva 38-szor jutott az elektron eddigi töltésénél kisebb értékre, CUNNINGHAM egyenletével 49-szer, ha pedig $f = \frac{1}{2}$, akkor 69 esetben. Általában azok a részek, melyeknek sugara $3 \cdot 10^{-5}$ cm-nél kisebb, majdnem mind szubelektronokat hordoztak. Abban igazat kell adnunk EHRENFEST-nak, hogy az a módszer, a hogyan CUNNINGHAM egyenletének használhatóságát vizsgálni szokták, nem vezethet ennek a vitás kérdésnek megoldására. Mert hiszen mindig azt keresték, vajjon az egyes mérések e szá-

¹ Archives des sciences, XXXV., 1913. 299. l.

² Phys. Zeitschr., XII. 1911. 94. l.

mára ugyanazt az értéket szolgáltatják-e és melyik az az A és f érték, a melynél ez a kívánság teljesül. De ez az eljárás már feltételezi, hogy $4 \cdot 9 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e. nagyságú, oszthatatlan töltés van. Az első feladat tehát az volna, hogy *tapasztalatilag* megállapítsák azt az egyenletet, a mely ilyen kis gömbök esésére érvényes.

Már az 1910-i königsbergi vándorgyűlésen felvetette BORN¹ azt a kérdést, vajjon a BROWN-féle mozgás nem befolyásolja-e a részek pályáját. A gáz többé-kevésbé mindig ionizálva van. A negatív részek sebessége különbözik a pozitív részekétől. Tehát az ionok lökése a részecskére a két irányban különböző, vagyis a lökések folytán előálló BROWN-féle mozgás az elektromos térben az iránynyal változik. EHRENHAFT evvel szemben arra a tapasztalatra utalt, hogy az elektromos tér megfordítása-kor a részek egészen szabályosan mozogtak ide-oda anélkül, hogy a két irányban eltérés mutatkozott volna. Mikor EHRENHAFT² a BROWN-féle mozgást külön megvizsgálta, az ultramikroszkopikus részecskéknél az előállítás után fél óráig sokkal élénkebb mozgást talált, mint később. Élénkebb a mozgás akkor is, ha a töltés nagyobb. A molekuláris feltevés szerint egyenlő nagyságú, de különböző sűrűségű részek BROWN-féle mozgása megegyezik. EHRENHAFT megfigyelései ezt nem igazolják. A nagyobb sűrűségű részek kevésbé élénken mozogtak. Az emelkedés idejében jóval nagyobb ingadozások mutatkoztak, mint az esés idejében. Általában, ha elég sok megfigyelésünk van, a BROWN-féle mozgás nagyon kevésbé befolyásolja az eredményt. Ezt mutatja az a körülmény is, hogy ugyanazon részecske töltésének és sugarának ismételt meghatározásánál a nyert értékek megegyeztek.

MILLIKAN és FLETCHER³ $6 \cdot 6 \cdot 10^{-4}$ és $3 \cdot 10^{-5}$ cm közt változó sugarú olajgömbökön megismételték a méréseket. De míg EHRENHAFT ugyanazt a részecskét csak néhány perczig tudta megfigyelni, ők 4—5 óráig követték a fel-alá tartó mozgást. EHRENHAFT ultramikroszkopikus eljárással 0.01 cm-nyi emelkedést és süllyedést figyelt meg, ők pedig 1.3 cm úton át. Véleményük szerint ezek az eltérések elegendők az eredmények különbségének megmagyarázására. A főkot ismét a BROWN-féle mozgásban keresik. EHRENHAFT megfigyeléseinél a nagyon kis úton a BROWN-féle mozgás olyan rendű, mint a külső erők által okozott elmozdulás.

¹ Phys. Zeitschr. XI. 1910. 951. l.

² Phys. Zeitschr., XII. 1911. 98. lap.

³ U. o. 161. lap.

MILLIKAN és FLETCHER eredményei egymás közt jól egyeztek, az elemi töltés $4.891 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e.

Ugyancsak a BROWN-féle mozgás nagy befolyását mutatják WEISS¹ mérései. Ívfényben ezüstöt szétporlaszt és az így keletkező részeket 9×9 mm méretű, egymástól 0.95 mm-nyire levő sűrítőlapok közé vezette. A levegőt gondosan megszártította, hogy a részekre vízgőz le ne csapódjék. A tér egyenletességének biztosítása végett a sűrítő terének közepére szorítkozott. Ugyanazt a részt 20-szor, vagy még többször, egy esetben 63-szor sikerült a felszállásnál és esésnél megfigyelni. A STOKES törvényével számított eredmények jól egyeznek EHRENHAFt-éivel. 181 mérés közül 35 esetben a töltés $4 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e.-nél kisebb volt. CUNNINGHAM egyenlete még kisebb töltésre vezet. Egyetlen részecske megfigyelésénél az esés és a felszállás ideje sokszor lényegesen eltért. Ennek oka a BROWN-féle mozgás. Az EINSTEIN-féle elmélet szerint

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{2RT}{N} B,$$

λ az 1 sec alatt megtett út eltérése a középértéktől, $\bar{\lambda}^2$ pedig ezen eltérések négyzetének középértékét jelenti. Nagyságát a megfigyelésekből kell meghatározni. B a mozgékonyság, vagyis a sebesség 1 volt/cm térben. Ha az előbbi egyenlet alapján B -t ismerjük, akkor

$$e = \frac{v_1 + v_2}{BE},$$

E az elektromos tér erőssége. Az így számított értékek közepe $4.5 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e. $4.0 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e.-nél kisebb töltés egyáltalában nem mutatkozott.

De EHRENHAFt² éppen az ultramikroszkopikus részek megfigyelésére helyezi a súlyt, mert a szubelektronokat ezeken észlelte. A BROWN-féle mozgás előidéz ugyan eltéréseket az emelkedés és esés idejében, de még ha a legjobban eltérő adatokkal számítunk is, a részecske sugara és töltése közel egyenlő. Ezért EHRENHAFt azt hiszi, hogy a megfigyelt eltérések nem véletlenül állottak elő. Az arany- és ezüstrészek mindig jóval kisebb töltésre vezettek, mint az elektron eddigi értéke, akárhogy csoportosította a talált értékeket.

¹ U. o. 630. lap.

² U. o. 263. lap.

REGENER¹ másutt keresi a hibát. Tőle ered az a gondolat, a melyet már előbb említettünk, hogy ugyanazt a részecskét nem egy alá- és felszállásnál kell megfigyelni, hanem lehetőleg hosszú időn át. Az elektromos tér csak a sűrítő belsejében egyenletes, a szélek felé az erővonalak meggörbülnek. Az erővonalak elhajlása folytán a gömbök nem a leg-rövidebb utat írják le a lemezek között. Ha ezt nem vesszük tekintetbe, a mozgást túlságosan lassúnak találjuk. REGENER MILLIKAN módszerével olaj-, kálilúg- és ezüstrészeket figyelt meg. Az első két anyagon az elektron eddig elfogadott töltését és ennek egészszámú többszörösét találta. Az EHRENHAFTH eljárással készített gömbök töltése eltért ettől az értéktől. REGENER abban keresi ennek okát, hogy ívfényben ózon és nitrogén-oxidok keletkeznek. Ezek az ezüsttel vegyülnek és így ez az anyag nem alkalmas ilyen megfigyelésre. Az is lehet, hogy a levegő páratartalmából keletkező vízgömbök elnyelnek ilyen oxidokat és ezek a részek is az ultramikroszkóp látóterébe kerülnek.

PRZIBRAM² elismeri REGENER kifogásának alaposágát. A falakra rakódó töltés olyan hibát okozhat, a mely a talált eltérést megmagyarázza. Már régebben észrevette, hogy a falak közelében megfigyelt részecske nagy zavarokat mutat. Ezért a régebbi kockaalakú sűrítő helyett 10×10 cm méretű lapokat állít 1 mm [távolságra. $2 \cdot 10^{-5}$ cm-ig terjedő sugarú részecskéket figyelt meg, de szubelektront nem talált.

Nem így EHRENHAFTH.³ 5 mm átmérőjű, 1 mm távolságban levő sűrítőlapok között a tér közepén figyelte a részecskéket. REGENER a tér egyenletességének bizonyítékát abban találja, hogy ugyanazt a részecskét hosszú időn át meg lehet figyelni. Ez EHRENHAFTH sűrítőjénél is megvan. Az egyik részecskét 80 fel- és alászállásnál követte, anélkül, hogy a rész pályájáról letért volna. Az sem lehetséges, hogy oxidok jelenléte zavarta a mérést. Az oxid csak úgy lehet a levegő lecsapódásának magja, ha a levegő nedves. Már pedig EHRENHAFTH a levegőt gondosan megszárította. Azonkívül az ultramikroszkópban az ezüstrészeket és a ködrészeket külsejükről rögtön meg lehet különböztetni. Aranyrészeket száraz levegőben és szénsavban vizsgált és szintén talált szubelektronokat. Még ha nem is ezüstrészeket figyelt volna, hanem az ezüstnek valamilyen

¹ U. o. 135. lapon.

² U. o. 260. lap.

³ U. o. 261. lap.

sóját, vagy oxidját, akkor sem volna a sűrűségváltozás elég nagy az eltérések magyarázatára. De «a chemia jelenlegi állásánál teljesen kizárt dolog, hogy ilyen gázok ultramikroszkopikus ezüstrészekkel vegyületbe lépjenek».

Az a kifogás, hogy a részecskék sűrűsége nem egyezik meg annak az anyagnak sűrűségével, melyből keletkeztek, már a königsbergi vándorgyűlés vitájában felmerült. Lehet, hogy a gömbök felületükön oxidálódnak, vagy pedig vízpára rakódik le rajtuk. EHRENHAFT a higanygömböket lefotografálta, a felvételt budapesti előadásában bemutatta. A részecskék gömbalakúak, semmiféle szabálytalanság nem látszik rajtuk. Felületükön a fémes tükrözés is mutatkozott, tehát nem oxidálódtak. Ez egyúttal válasz arra az ellenvetésre, a melyet először PERRIN¹ hangoztatott. Abból a körülményből, hogy EHRENHAFT az első méréseknél BROWN-féle mozgást nem vett észre, PERRIN azt következtette, hogy a megfigyelt részecskék szivacsalakúak. Ezeknek sűrűdása a levegőben nagyobb, mint a gömbé és így sem STOKES, sem CUNNINGHAM egyenlete nem használható.

JOFFÉ² a részecskék előállításának módjából azt következteti, hogy a megfigyelhető részeken kívül még nagyszámú kisebb, egyáltalában nem látható rész is kerül a sűrítőlapok közé. Ezek azonban lassítják a megfigyelt gömb mozgását. Egyrészt azért, mert a megfigyelt rész maga köré vonzza az ellenkező töltésű, láthatatlan kis részeket. Ez a lefelé esést kevésbé befolyásolja, de a felszállást az elektromos térben lassítja. Másrészt a sűrítő lapjainál az ellenkező töltésű részek felhalmozódnak és gyengítik az elektromos teret. Az elektromos tér egyhuzamban csak rövid ideig marad meg, azért a részek töltésének kiszűrését a sűrítőlapokon nem várhatjuk. MILLIKAN mérései ettől a hibától mentek, mert itt a portól mentes levegőbe csak néhány, nem nagyon kis csepp jut.

Mikor MILLIKAN³ méréseit megismételte, módszerét az összes eddigi hibaforrások tekintetbevételével megjavította. Újra meghatározta a levegő belső sűrűdésének együtthatóját: 23° C-nál $\eta = 0.00018240$. Az optikai berendezést tökéletesítette úgy, hogy ha a csepp távolsága változik, a beállítás mindig nem volt éles. A sebességeket mindenféle nyomás-

¹ C. R., 152. 1911. 1165. lap.

² Phys. Zeitschr. XI. 1911. 268. lap.

³ Phys. Zeitschr., XIV. 1913. 796. lap.

nál vizsgálta. Eddig az $\frac{L}{a}$ viszonyt csak úgy változtatták, hogy a részek sugara volt más, most a nyomás változása folytán a szabad úthossz is különböző volt. A levegő áramlását MILLIKAN teljesen kiküszöbölte. Azonkívül tapasztalatilag igazolta az alapul szolgáló feltevések helyességét. Ezek a következők: 1. A töltés nem befolyásolja a levegőben keletkező sűrűlódást. 2. Az olajcseppek az esésnél és emelkedésnél úgy viselkednek, mint a szilárd gömbök. 3. A részecskék sűrűsége ugyanakkora, mint nagyobb tömegben. Méréseinek középértéke $e = 4.774 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e., tehát az elektronelmélet eddigi felfogásával megegyezik.

Csakhogy PERRIN¹ a folyadékrészek használatát nem tartja megengedhetőnek. MILLIKAN pedig éppen folyadék szétporlasztásával állította elő a lebegő részeket. CUNNINGHAM egyenlete ugyanis csak szilárd részecskékre érvényes. A sűrűlódás folytán a folyadékgömbben folytonos áramlás van. Ámde MILLIKAN külön igazolta a folyadékcseppek használhatóságát.

ROUX² úgy kerülte el ezt a bizonytalanságot, hogy folyékonyként porlasztott szét. A részek gyorsan megszilárdultak és gömbök maradtak. MILLIKAN módszerével ugyanazt a részt órákon át meg tudta figyelni. A részek sugarát CUNNINGHAM egyenletével számította. MILLIKAN A értékét 0.815-nek vette. Ez akkor helyes, ha az ütközés rugalmatlan. Ámde Roux szerint ez teljesen indokolatlan. Ha a lebegő részek rugalmasan verődnek vissza, akkor $f=1$ és $A=1.63$. Így MILLIKAN 4.9 helyett 4.4-et kapott volna. Roux eredménye 4.17 és így közel jutott a Brown-féle mozgásból levezetett értékhez.

Az utóbbi időben SCHIDLÖF és KARPOWITZ³ másutt keresik EHRENHAFt méréseinek hibaforrását. Mindjárt kezdettől fogva észrevették, hogy a megfigyelt higanycsepp folyton kisebbedik. Ha a részecske sötétben marad, akkor is csökken, de kisebb mértékben, mint megvilágításnál. Ezért az esés ideje folyton nő, az emelkedése pedig kisebbedik. Így az egyik részecske sebessége kezdetben 0.54 cm/sec, 30 perc múlva 0.39, 60 perc múlva pedig 0.29. A sebesség csökkenésével párhuzamosan a megfigyelt gömb a fényt egyre gyengébben veri vissza, végül egészen láthatatlan lett. Ezt nem lehetett töltésváltozásra visszavezetni, mert ez sohasem

¹ Id. helyen.

² C. R. 152. 1911. 1168. lap és 155. 1912. 1490. lap.

³ C. R. 158. 1914. 1992. lap.

önként következik be, hanem csak akkor, ha a levegőt ionizáljuk. Ilyenkor pedig a változás ugrásszerű. A megfigyelt jelenséget csak a gömb folytonos csökkenésével lehet magyarázni. Ugyanebben a sűrűtőben az olajcseppek állandó és MILLIKAN-ével jól egyező értékre vezettek. A higanycseppek nemcsak tiszta és száraz levegőben, hanem nitrogénben is csökkentek. Lehet, hogy a higanycseppek csökkenését a fény okozta párolgás idézi elő. Erre azért is gondoltak, mert a fény erősségének csökkenésekor az esés sebessége kevésbé csökkent. Ennek a csökkenésnek tekintetbevételével olyan értéket kaptak e -re, a mely jól egyezett MILLIKAN-ével.

Ámde EHREHAFT¹ még azt is kétségbe vonja, hogy ez a jelenség egyáltalában bekövetkezik. SCHIDLOF és KARPOWICZ megfigyelése egyedül áll. KONSTANTINOWSKY, MILLIKAN, JOFFÉ ugyanazt a módszert használják, de ilyen jelenséget nem vettek észre. Sőt PRZIBRAM még sokkal illékonyabb anyagoknál sem. EHREHAFT megbízásából SCHWEIGER ugyanolyan nagyságú higanycseppeket készített és lefotografálta őket fél órai megvilágítás előtt és után. A higanycseppeken semmiféle csökkenés sem látszott. EHREHAFT megfigyeléseinél az esés közepes sebessége hosszú időn át állandó maradt. A sebesség a töltés megváltozásakor is ugyanakkora maradt. A BROWN-féle mozgásnak EINSTEIN-féle elmélete túlságosan nagy értékeket ad e -re, de EHREHAFT még így is szubelektronokra jutott. Ilyen kis töltéseket aranyrézecskeken is talált, pedig ezeknél a párolgást kizártnak kell tekintenünk. Ebben az elméletben egyáltalában nincs feltevés a részek alakjára és nagyságára.

SCHIDLOF és KARPOWICZ² eljárásuk megismétlésénél újra csak meg erősítették előbbi megfigyelésüket. 10 cm átmérőjű vaslapokból álló sűrítő felső lapján igen kis nyílás van, néhány higanycsepp ezen keresztül jut a lapok közé. Több, mint 100 cseppet figyeltek meg. A tömeg kisebbedését lehetőleg kerülték, ezért a részecskét óvták a fénytől. Sohasem tapasztalták, hogy a sebesség állandó maradt volna. Az esés sebessége növekedett, egyúttal az emelkedés csökkent. Olajcseppek sebessége ellenben nem változott. A jelenséget csakis a részek kisebbedésével tudják magyarázni. A kétféle megfigyelés tehát egymásnak ellentmond. Más dolog a jelenség magyarázata. SCHWEIGER felvételei ellen-

¹ Phys. Zeitschr., XV. 1914. 955. lap.

² Phys. Zeitschr., XVI. 1915. 42. lap.

mondanak a párolgásnak. De ezek nyugvó cseppekről készültek. Lehet, hogy a mozgó cseppek a sűrűlódás folytán kisebbednek, a higany felülete mozgás közben leválik. A megvilágításnak az lehet a befolyása, hogy a felmelegedés miatt a gáz sűrűlódásának együtthatója nagyobbodik, a higanyé csökken és így a cseppek nagyobb mértékben csökkennek. Olajcseppeknél a belső sűrűlódás akkora, hogy még néhány óra alatt sem várhatunk ilyen változást. Az eddigi megfigyelések nem adnak elég biztos alapot a jelenség magyarázatára.

A legutóbbi vizsgálatok még jobban kiélestitik a vitát. ZERNER¹ MILLIKAN és FLETCHER módszerével olajcseppeket készít. A részek sugarát CUNNINGHAM egyenletével határozza meg. De KUNDSSEN és WEBER² megállapították, hogy az L/a viszony nagy változásánál A nem állandó, hanem

$$A = 0.683 + 0.354 e^{-1.845 \frac{a}{L}}$$

ZERNER is ezt használta. Az ellenállástörvény alapján az elektron töltésénél jóval kisebb töltéseket talált. A BROWN-féle mozgás alapján számított értékek nagyobbak az előbbieknél, de még így is kap szubelektronokat. Minél kisebb részeket figyelt meg, annál kisebb töltéseket talált. Ha $a = 3.21 - 3.39 \cdot 10^{-5}$ cm, akkor az értékek közel álltak MILLIKAN-éhez. Ha $a = 1.93 \cdot 10^{-5}$ cm, akkor $e = 1.32 \cdot 10^{-10}$, más alkalommal $1.70 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e. Az olajcseppeknél tehát hasonlóak a viszonyok, mint a higanycseppeknél.

Még sokkal feltűnőbbek KONSTANTINOWSKY³ eredményei. Aranyrészeket és összehasonlítás végett higanycseppeket vizsgált. A részecskék még kisebbek voltak, mint EHRENFEST-éi, sugaruk 10^{-6} cm rendű. Az elhajlított fényben a részecskék sajátos színe mutatkozott (optikai rezonancia). Így az aranyrészek vereses sárga, narancs, sárga, sárgás zöld és zöld színűek voltak. A legkisebb részekenél a színt már nem lehetett megállapítani, fehéreknek látszottak. A kis higanycseppek azurkék voltak. A gömbalakot KONSTANTINOWSKY többféleképpen külön kimutatta. Így sötét térben mikrofotografiát készített róluk. Olyan részeket, a melyeknél szípváltozás, vagy színváltozás gyanússá tette a gömbalakot, nem hasz-

¹ U. o. 10. lap.

² Ann. Phys. 36. 1911. 981. lap.

³ Ann. Phys. 46. 1915. 261. lap.

nált. Ha a részek nem lettek volna gömbök, akkor az elektromos tér bizonyos irányba állította volna őket és így mozgékonyaságuk, vagyis a sebesség egységnyi erő hatása alatt, más lett volna a nehézségi erő terében, mint a két erő együttes terében. KONSTANTINOWSKY a mikroszkópot különválasztotta a sűrítőtől. A részecske a BROWN-féle mozgás folytán kilép abból a síkból, a melyre a mikroszkóp be van állítva és így a távcsövet mindig utána kell állítani. Ha a részek a gömbtől eltértek volna, akkor az elektromos tér bekapcsolásánál el kellett fordulniok és így a kép elhomályosodott volna. De ez sohasem mutatkozott. A részek töltését KONSTANTINOWSKY úgy változtatta, hogy a levegőt rádiummal ionizálta. Ha a töltést egyszer a BROWN-féle mozgás alapján, máskor az ellenállástörvény alapján határozta meg, az eltérés az ilyen kis részeknél még nagyobb volt, mint az eddig megfigyelt részeknél. A töltés a sugárral csökkent. Általában az összes meghatározott töltések kisebbek voltak az elektron elfogadott értékénél, sőt az elemi töltés $\frac{1}{50} - \frac{1}{200}$ részét is sikerült megfigyelni. Még a BROWN-féle mozgás alapján is az elektron $\frac{1}{10}$ részét lehetett találni.

Mint látjuk, a felhőmédszer az egyes megfigyelőknél éppen nem vezet megegyező értékre. Egyesek olyan értékeket találnak, a melyek eddigi ismereteinkkel összhangzanak, míg mások jóval kisebb töltésmennyiségekre következtetnek. Annál nagyobb jelentőségű az a körülmény, hogy a radioaktív jelenségekből is meríthetünk módszert *e* meghatározására. Mint ismeretes, egyes radioaktív anyagok α -sugárrészecskéket bocsátanak ki. Ilyen pl. a rádium. Már régebben ismeretes volt, hogy rádium jelenlétében helium fejlődik. Az α -sugaraknak pozitív töltésük van. Ha az α -sugarak FARADAY-féle hengerbe, tehát előlapján nyílással ellátott fémhengerbe jutnak, akkor a hengerrel összekötött elektrometer a hozzájutó pozitív töltést kimutatja. Az a fémlap, a melyre a rádiumot helyezzük, a pozitív töltésvesztés miatt negative töltődik meg. RUTHERFORD állította fel azt az általánosan elfogadott magyarázatot, hogy az α -sugarak pozitív elektromos töltésű helium-atomok.

Láttuk, hogyan kell a rádium által kibocsátott α -sugarak számát meghatározni. Másrészt megmérhetjük azt a töltést, a melyet az α -sugár-részecskék magukkal visznek. A részek útjába elektrometerrel összekötött FARADAY-féle hengert kell állítanunk. Mivel a részecskék száma már ismeretes, egy-egy α -részecske töltését külön megállapíthatjuk. De RUTHERFORD azt találta, hogy minden α -részecske két elemi töltésmeny-

nyiséget hordoz. Ennek tekintetbevételével azt kapjuk, hogy az elektron töltése 4 és $5 \cdot 10^{-10}$ e. szt. e. közt van.

Hasonló eredményre vezet a felbomlott rádium mennyiségének megfigyelése. A radioaktív anyagok felbomlásának sebességét eddig semmiféle külső behatással siettetni, vagy lassítani nem tudjuk. Minden anyagra jellemző a bomlási félidő, a mely alatt az anyag fele átalakul. A rádium bomlási félideje körülbelül 2000 év. Másodpercenként a radium atomainak $1 \cdot 09 \cdot 10^{-11}$ része alakul át. A rádium atomsúlya 226.5. Tehát 1 gr.-atomnyi rádium másodpercenként $226.5 \cdot 3.4 \cdot 10^{10}$ α -részecskét bocsát ki. Másrészt az N számú molekulából $N \cdot 1 \cdot 09 \cdot 10^{-11}$ molekula bomlik fel. Mivel minden rádium-atom átalakulása egy α -részecske kibocsátásával jár,

$$N \cdot 1 \cdot 09 \cdot 10^{-11} = 226.5 \cdot 3.4 \cdot 10^{10}.$$

Ebből

$$N = 7.1 \cdot 10^{23},$$

és így e számára újból az előbbi határok között levő értéket nyerünk.

Mint láttuk, lényegében háromféle módszerünk van e meghatározására. Az egyik szerint az Ne szorzat és N értékéből állapítjuk meg e értékét, a második a felhőmódszer, a harmadik a radioaktív jelenségekből következik. Az első és harmadik egymással jól egyező értékekre vezet. A felhőmódszer nemcsak régebben, hanem ma is egyeseknél szintén az előbbiekkal összhangzó eredményt nyújt, míg mások jóval kisebb töltéseket találnak. Ezt a vitát tehát nem tekinthetjük elintézettnak. Még eldöntetlen kérdés, vajjon ezek a kis töltések valóban megvannak-e a természetben, ha pedig nem, mi a kétségtelen oka a talált eltérésnek.

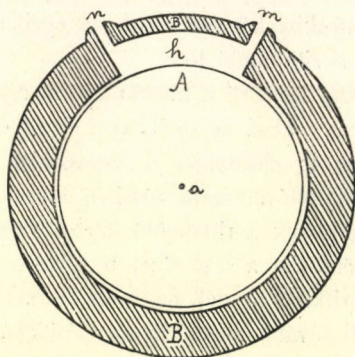
Mende Jenő.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

A Gaede-féle molekuláris és diffúziós légszívó.

GAEDE az idei évben negyedik új szerkezetű légszívóját hozta forgalomba. Ezek közül a molekuláris (Phys. Zeitschr., 1912. XIII. 864. l.) és a diffúziós (Ann. Phys. 1915. 46. 357. l.) légszívóknál teljesen új szívási módszerek vannak megvalósítva, azért a következőkben ezt a két szerkezetet akarom röviden ismertetni.

Minden eddigi légszívóban szilárd vagy folyékony dugattyú bizonyos gázmennyiséget elhatárol, a ritkítandó tértől elzár. Ez a gáz a dugattyú



1. ábra.

mozgásakor a szabadba távozik. A molekuláris légszívóban nincs dugattyú, a megritkítandó tér még elzárva sincs, hanem állandóan érintkezik az előre ritkított térrel. A B fémtokon belül A fémhenger (1. ábra) a tengely körül forog. A külső fémburkon két nyílás (m és n) van, ezeket h cső köti össze. Forgassuk az A hengert az óramutató járásának irányában, akkor a súrlódás folytán a henger a levegőt n -től m felé ragadja. Ezáltal n és m nyílások között nyomáskülömbőség keletkezik. A míg a B tokon belül a nyomás nagy, a nyomáskülömbőség állandó,

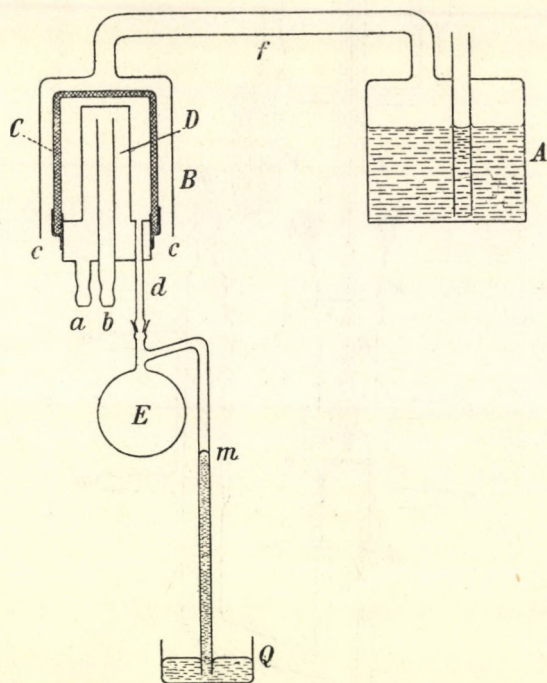
független a nyomás értékétől. 1 atmoszféránál a nyomás m -nél 760 mm, n -nél pl. 750 mm. A ritkítás előrehaladtával m -nél a nyomás 40 mm, akkor n -nél ismét 10 mm-rel kevesebb. Kis nyomásnál, 0,001 mm alatt, a két helyen fellépő nyomás viszonya állandó. Ekkor a molekulák a körül minden irányban visszaverődnek, egyik faltól a másik felé haladnak a nélkül, hogy összeütköznének. Ha a henger sebessége nagyobb, mint a molekulaké, akkor az érintő irányában visszavert molekulák n -től m felé akkora sebességgel haladnak, a mely nagyobb a molekuláris sebesség kétszeresénél. A hengertől n nyíláshoz egyáltalában nem uthatnak molekulák. Ennélfogva az n nyílásnál a molekulák ritkulnak.

Mivel ez a következtetés csak kis nyomásra vonatkozik, a ritkítandó teret először másféle szívóval előre kell ritkítani és csak a végső, igen kis nyomás elérésére lehet a molekuláris légszívót előnyösen használni. GAEDE azért választotta ezt az elnevezést, mert a gázok molekuláris mozgását használja fel. A hatás fokozása végett az A fémhengeren több nyílaspár van, m nyílás n_1 -gyel, n pedig m_1 -gyel van összekötve s í. t. A külső hengeres burokból két cső vezet, az egyik az előritkító légszívót köti össze, a másik a ritkítandó teret.

Mivel a molekuláris légszívó a molekulák mozgásán alapszik, azért azt várhatjuk, hogy az eddigi készülékekkel ellentétben nemcsak a gázokat, hanem a gőzöket is eltávolítja. A tapasztalat ezt a következtetést igazolta. Eddig a gőzök eltávolítására részben elnyelő anyagokat (foszforpentoxid, faszén) helyeztek a ritkítandó térbe szárítás végett, részben pedig alacsony hőmérsékleten a gőzöket megfagyasztották. A molekuláris légszívóval elért ritkítás annál nagyobb, minél kisebb a nyomás a tokban, vagyis minél tovább folytattuk az előritkítást és minél nagyobb a henger fordulatszáma. Viszont minél nagyobb a molekulák sebessége a hengeréhez viszonyítva, annál kisebb a ritkítás megegyező fordulatszám mellett. Így ha a levegőmolekulák sebessége 0,5 km/sec, a hidrogénmolekulaké 1,8 km/sec, akkor a levegőben nagyobb ritkítást érhetünk el, mint hidrogénben.

A szívósebesség S , az 1 sec alatt kiszívott levegő térfogatát jelenti: $S = -\frac{dv}{dt}$, v a térfogat, t az idő. Mivel $vp = \text{const}$, azért $S = \frac{V}{p} \frac{dp}{dt}$, V a ritkítandó térfogat, p a nyomás. Integráljuk az előbbi egyenletet olyan t időtartamra, melynek elején a nyomás p_1 , végén p_2 , akkor $S = \frac{V}{t} \lg \text{nat} \frac{p_1}{p_2}$. A végső ritkítás közelében $\frac{p_1}{p_2}$ 1-hez, tehát S 0 felé közeledik. Nagyobb nyomásnál a nyomáskülönbség a belső súrlódástól

függ és a szívósebesség annál nagyobb, minél kisebb a nyomás. 0.01 mm nyomásnál a molekulák szabad úthossza éppen olyan rendű, mint a nyílások összekötő csövének hossza, ekkor a molekuláris légszívó legelőnyösebben működik. A legkisebb nyomás, a melyet sikerült előállítani, 10^{-6} mm-nél kisebb.

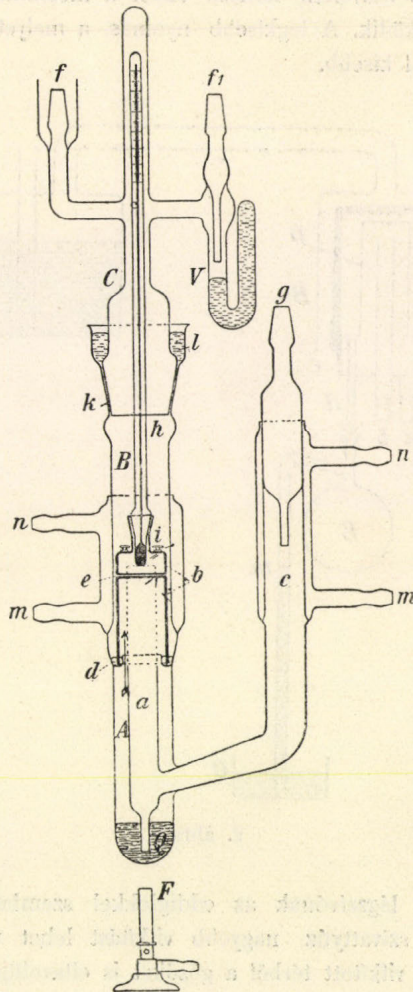


2. ábra.

A molekuláris légszívónak az eddigiekkel szemben az az előnye, hogy gyorsabban szívattyúoz, nagyobb ritkítást lehet vele elérni, főleg pedig az, hogy a ritkított térből a gőzöket is eltávolítja.

Még nagyobb ritkítást lehet előállítani a legújabb diffúziós légszívóval. Ennek működését GAEBE következő kísérletével érthetjük meg: Az A edényben (2. ábra) fejlesztett vízgőzt B harangba vezetjük. A harang alatt C agyagedény van, benne pedig D hűtő. *a* és *b* a hideg víz be- és kivezető csövei; *d* cső a hűtő és az agyagfal közé vezet, a hűtő falán lecsapódó vizet *E* gömbbe juttatja. A gömbből kiágazó meggörbi-

tett cső higanyba (Q) ér. A gőz, miután az agyagfalat körüljárta, c -nél a szabadba távozik. A gőz egy része az agyagfalon átdiffundál és a hű-



3. ábra.

tőn lecsapódik. Az A edényből kiáramló gőzt f -nél lánggal túlhevítjük, hogy lecsapódását az agyagfalban meggátoljuk, mert ekkor az agyag porusait eltömné. A diffúzió alatt Q -nál a higany egyre emelkedik,

m felé közeledik egészen a külső légnyomásig. Az agyagfalon belül tehát a levegő ritkul. Ez a szerkezet mint légszívó működik. Így GAEDE első kísérleti bizonyítékát adta annak, hogy tisztán gőzök diffúziójával szívó hatást létesíthetünk. Az agyagfal ugyanis egymással párhuzamos hajszálcsöveket tartalmaz. Legyen r , a hajszálcső sugara, olyan kicsi, hogy r^4 az r^3 mellett elhanyagolható. A cső egyik végén a gőz (az előbbi eljárásnál vízgőz) nyomása P_1 , a gáz (levegő) nyomása 0. Ez úgy lehetséges, hogy erős gőzáram a gázt magával ragadja. A cső másik végén a gőznyomás 0, a gőz a csőben lehül és lecsapódik, a gáz (levegő) nyomása pedig p_2 , mely P_1 -hez képest kicsi. GAEDE erre az esetre azt találta, hogy annak a *gáznak* térfogata, a mely másodpercenként a csövön átdiffundál, vagyis a szívósebesség:

$$V = \frac{n}{L} \frac{\pi r^3}{2\vartheta},$$

n a párhuzamos csövek száma, L a cső hossza, ϑ a gáz külső sűrűlésének együtthatója. A csővel összefüggő edényben a gőz áramlásával ellentétes végen a nyomás csökken.

Az előbbi készülék szívósebessége kicsi, azért a végleges szerkezetben az eljárás egyes részekben módosult. A diffúziós légszívóban (3. ábra) a vízgőzt higanygőz helyettesíti, mert ennek nyomása szobahőmérsékleten kicsi. Q higanyt F láng melegíti. A higanygőz A -ból a nyíl irányában b fémhengeren és a csövön át c hűtőbe kerül, innen pedig vissza Q -hoz. m és n a hűtő be- és kivezető csövei. A b fémhenger higanyval telt d vályúban áll. A és B tér tehát csak az e nyíláson át érintkezik. Ez a keskeny rés pótolja a hajszálcsövet. Legjobb a szívóhatás, mikor a nyílás szélessége a molekula szabad úthosszának méretével egyenlő. A nyíláson keresztül a gőz A -ból B -be áramlik. Ennek falát ismét hideg víz hűti, tehát a lehűtött falon a gőz lecsapódik. A lecsapódott higany d vályúba csöpög, innen pedig Q -hoz esik vissza. B edényből a levegő a gőzzel ellentétes irányban diffundál az e nyíláson át. B térben és az f -nél bekapcsolt burában a levegő ritkul. A gőz az a csövön és c hűtőn át a g -nél bekapcsolt előlégszívóhoz jut.

A szívósebesség a higany nyomásának bizonyos értékénél legnagyobb. A h hőmérő, melynek gömbje az a cső nyitott végén van, a higanygőzök hőmérsékletének leolvasására való. GAEDE tapasztalati úton megállapította, hogy a higanygőzök legelőnyösebb hőmérséklete 99° . Az e

nyílás szélességét is be kell állítani. Czélszerű két nyílást használni, mindegyik 0.04 mm széles. A nyílások külön fémlapon vannak, ezt pedig i csavarral lehet megerősíteni. A készülék felső részét (C) csiszolt nyakú dugóval (k) külön lehet felhelyezni. A g -nél bekapcsolt légszívó tulajdonképen előszivattyú. Czélszerű az előszivattyút nagyobb térfogatú üvegedénnyel kapcsolni össze, a mely két nyílással bír; az egyik g -vel, a másik pedig f_1 -gyel van összekapcsolva. A szivattyúzás megkezdésekor az előszivattyú az f -nél becsatolt térből f_1 -gyen keresztül szívja ki a gázokat. Ha az előszivattyúzásnál a nyomás eléggé csökken, a V manometeres szelep a közvetlen összeköttetést a kiszivattyúzandó tér és az előszivattyú között elzárja. Ezután kell megindítani a diffúziós légszivattyút.

Mint az idézett egyenlet mutatja, a szívósebesség független a gáz (levegő) nyomásától. Ez azt jelenti, hogy a szívósebesség még kis légnyomásnál is ugyanaz marad. Az eddigi légszívóknál a nyomás csökkenésekor a szívósebesség kisebbedett. Azonkívül az az előnye ennek a légszívónak is megvan, hogy a levegőn kívül minden gőzt kiszivattyúz, kivéve a higanygőzőket. Ha ezeket megfagyasztjuk, akkor a diffúziós légszívóval nagyobb ritkítást érhetünk el, mint az eddig ismert készülékek bármelyikével.

Mende Jenő.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi fizetben jelenik meg,* a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Matematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

24. évfolyam.

1915. nov.—decz.

7—8. füzet.

ZÁRT KONVEX GÖRBÉKKEL KAPCSOLATOS GÖRBÉKRŐL.

Mindenekelőtt legyen szabad néhány ismeretes, a konvex tartományra vonatkozó tételt felsorolni:

Konvexnek nevezünk egy tartományt akkor, ha a tartomány két pontját összekötő egyenes darab minden pontja a tartományhoz tartozik; a konvex tartománynak vannak belső pontjai és határpontjai. A konvex tartomány határpontjai folytonos, rektifikálható görbét alkotnak, mely, ha a tartomány véges, zárt görbe. Zárt konvex görbe alatt a véges konvex tartomány határpontjai által alkotott görbét értjük. Támaszvonálnak nevezzük azon egyenest, mely a tartomány egy vagy több határpontján megy át, a nélkül, hogy annak belső pontján átmenne. Egy adott egyenessel párhuzamosan mindig húzhatunk két és csak két támaszvonalat. Minden határponton át legalább egy támaszvonala megy át.

Czélszerűség szempontjából a támvonálnak irányítást fogunk adni. Vezessünk a konvex zárt görbe egy M pontján át egy ily támvonalt, nevezzük a görbén az óramutató járási irányával ellenkező irányt pozitív iránynak, az MT támvonal ezzel megegyező irányát a támvonal pozitív irányának; legyen O a kezdő pont, OX a poláris tengely, p a kezdőpont távolsága a támvonaltól, tekintsük p -t pozitívnak, ha O a támvonaltól balra esik, negatívnak az

* A Társulat Választmánya 1915. évi május hó 12-én tartott ülésében e 24. évfolyam terjedelmét hozzávetőlegesen 16 ívben állapította meg.

Szerk.

ellenkező esetben. Legyen α azon szög, melylyel az OX tengelyt a támvonallal való metszéspontja körül kell forgatni pozitív irányban, míg ez utóbbival össze nem esik, α tehát 0 és 2π közt fog változni; p -t és α -t a támvonal poláris tangenciális koordinátáinak tekinthetjük. Minden irányított vonalnak egy ily koordinátapár felel meg és viszont; minden irányított vonalhoz, a görbe egy és csak egy támvonala párhuzamos. Miután a támvonal a tartomány belső pontján nem megy át, ebből következik, hogy a tartománynak nincsen pontja a támvonal *jobb* oldalán. Válasszunk a görbén egy kezdőpontot A -t, jelöljük s -sel a pozitív irányban vett AM ívhosszat; állítsuk s -set α függvényeként elő

$$s = s(\alpha), \quad (1)$$

akkor e függvény, α monoton függvénye. Tényleg húzzuk meg a görbe M pontjában a tartomány egy támvonalát, legyen α ennek iránya, vezessük az M ponton át az $\alpha + \Delta\alpha$ irányú egyenest, ha $\Delta\alpha$ elég nagy, ez az egyenes a görbét még egy pontban, M_1 -ben fogja metszeni, az $\alpha + \Delta\alpha$ irányú támvonal érintési pontjai okvetlen az M és M_1 pontokat pozitív irányban összekötő ívdarabon lesznek, mert ellenkező esetben a tartomány M pontja az $\alpha + \Delta\alpha$ irányú támvonal jobb oldalára kerülne, a mi ellenkeznék a görbe konvexitásával. Tehát α növekedésével növekszik az s ívhossz is.¹ Miután az (1) függvény monoton, tehát korlátos változású (à variation bornée) is, a miből ismét következik, hogy a görbe görbületi sugara, $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$, α -nak csak oly értékeinél lehet határozatlan, melyek zérus mértékű halmazt alkotnak.

A zárt konvex görbe támvonalait a

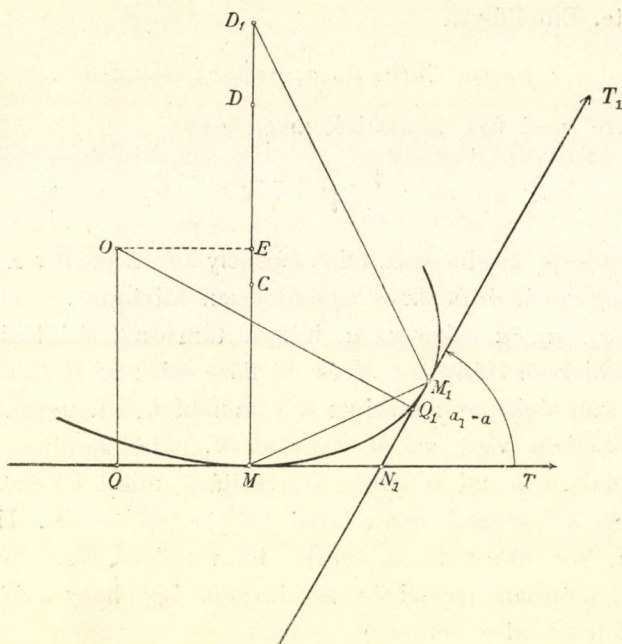
$$p = p(\alpha) \quad (2)$$

2π periodusu, egyértékű függvénynyel állíthatjuk elő, ez egyen-

¹azonban könnyen belátható, hogy s szakaszonként constans is lehet.

Letet a görbe tangenciális poláris egyenletének tekinthetjük. Bizonyítsuk be, hogy a (2) függvény folytonos s hogy véges, határozott jobboldali és baloldali differenciálhányadossal bír.

Miután p kisebb, α minden értéke mellett, azon kör sugaránál, melynek középpontja O , a koordináta rendszer kezdőpontja és mely az egész tartományt magában foglalja, tehát p mindég véges. Legyenek p , α az M ponton átmenő MT tá-



1. ábra, a hol $OQ=p$ $QM=p'$ $MC=\frac{1}{2}MD=p+p''=q$ és $EC=-p''$.

vonal koordinátái, p_1 a_1 pedig az M_1 ponton átmenőei, legyen továbbá $a_1 < a + \pi$, ily körülmények közt a két támvonal metszési pontja N_1 okvetlenül az MT vonalon az M ponttól pozitív irányba esik, különben M az M_1T_1 támvonal jobb oldalára kerülne, a mi a görbe konvexitása miatt lehetetlen; továbbá bármily helyzetben legyen is a kezdőpont, a következő egyenlőség áll fenn, (1. ábra) QN_1 -et pozitívnak véve, ha N_1 az érintőn Q -tól pozitív irányba esik, negatívnak az ellenkező esetben:

$$p_1 = \overline{QN}_1 \sin (a_1 - a) + p \cos (a_1 - a),$$

azaz

$$p_1 - p = \overline{QN}_1 \sin (a_1 - a) - 2p \sin^2 \frac{1}{2} (a_1 - a).$$

Ha R -rel jelöljük az említett, a tartományt magában foglaló kör sugarát, akkor, minthogy $|p| < R$ és ha $a_1 < a + \frac{\pi}{2}$, akkor $|\overline{QN}_1| < |\overline{OM}| + \text{arc } MM_1$, tehát $|\overline{QN}_1| < R + K$, a hol K a görbe kerülete. Ennélfogva

$$|p_1 - p| < (R + K) |a_1 - a| + \frac{1}{2} R (a_1 - a)^2;$$

ha végre a_1 -et úgy választjuk meg, hogy

$$0 < |a_1 - a| < \frac{1}{R} [\sqrt{(R + K)^2 + 2R\epsilon} - R - K],$$

akkor $|p_1 - p|$ kisebb lesz, mint bármely adott, pozitív ϵ . A $p(a)$ függvény tehát 0-tól 2π -ig egyenletesen folytonos.

Ha $a_1 > a_2 > a$ akkor az a_2 irányú támvonal érintési pontja az előbbiekből kifolyólag M és M_1 közé esik; az $M_2 T_2$ támvonal pedig szükségképen metszi az \overline{MN}_1 vonaldarabot, ugyanis ellenkező esetben vagy az M , vagy az M_1 pont kerülne az $M_2 T_2$ jobboldalára, a mi a görbe konvexitása miatt lehetetlen. Legyen N_2 a metszési pont, tehát $\overline{QN}_1 > \overline{QN}_2 > \overline{QM}$. Ha pedig $a_2 > a_3 > a$, akkor az a_3 irányú támvonal az \overline{MN}_2 vonaldarabot N_3 pontban metszi és így tovább, úgy hogy a következő monoton korlátos sorozatot nyerjük

$$QN_1 > QN_2 > QN_3 > \dots QN_i > \dots QM.$$

Ha tehát a_1 közeledik a felé, akkor, miután minden monoton korlátolt sorozatnak van határértéke, \overline{QN}_i valamely QN határértékhez közeledik, a hol $QN \leq QM$, tehát

$$\begin{aligned} \lim_{a_1 \rightarrow a} \frac{p_1 - p}{a_1 - a} &= \lim \left[QN_1 \frac{\sin (a_1 - a)}{a_1 - a} - \frac{2p}{a_1 - a} \sin^2 \frac{1}{2} (a_1 - a) \right] = \\ &= QN = p'(a + 0). \end{aligned}$$

Továbbá, mint láttuk, $|QN| < R + K$, tehát a (2) függvények

jobboldali differenciálhányadosa határozott, korlátos értékkel bír. Hasonlóképpen kimutatható, hogy a negatív irányban vett differenciálhányados $p'(a-0)$ szintén meghatározott értékű, korlátos és $\leq QM$, de a két differenciálhányados nem szükségképpen egyenlő, ha egyenlők, akkor $p'(a) = \overline{QM}$, a hol Q a kezdőpontból az érintőre bocsájtott merőleges talppontja. Ha p' pozitív, akkor az érintési pont a Q ponttól az érintőn mérve, pozitív irányba esik, ellenkező esetben negatívba. Miután a (2) függvény differenciálhányadosai korlátosak, tehát a (2) függvény szintén korlátosan változó (à variation bornée), miután ezenkívül még folytonos is, következésképpen egyenletesen konvergens FOURIER-sorba fejthető.

Mint láttuk a

$$p' = p'(a) \quad (3)$$

függvény nem szükségképpen folytonos; bizonyítsuk be, hogy korlátosan változó függvény; ha konvex görbénket az $MM_0 \dots$ konvex poligonon helyettesítve gondoljuk és felírjuk, hogy az $OQMM_0Q_0O$ sokszög vetülete a Q_0MM_0 irányra nulla, a következő relációt kapjuk, ha $MM_0 = \Delta s$, $Q_0M_0 = p' + \Delta p'$ $QM_0Q_0 = \Delta a$

$$\Delta s = \Delta p' + p'(1 - \cos \Delta a) + p \sin \Delta a \quad (4)$$

és az összegezést elvégezve

$$s(a) - s(0) = p'(a) - p'(0) + \Sigma p'(1 - \cos \Delta a) + \Sigma p \sin \Delta a$$

és ha Δa zérus felé közeledik

$$s(a) - \int p da + p'(0) - s(0) = p'(a).$$

Ha kezdőpontul egy belső pontot választunk akkor $p > 0$, tehát a (3) függvényt két pozitív nem csökkenő függvény különbözete-ként állítottuk elő, a miből következik, hogy e függvény is *korlátos változású* s így konvergens FOURIER-sorba fejthető; p'' azonban már nem szükségképpen ily függvény. Azon a irá-

nyokban, melyekben p' folytonos és differenciálható, (4)-ből következik, hogy a görbületi sugár ρ

$$\rho = \frac{ds}{da} = p + p''. \quad (5)$$

Húzzuk meg az M pontban (1. ábra) a görbe belső normálisát, továbbá emeljünk az MM_1 húrra, M_1 pontban merőlegest, legyen D_1 e vonal és a normális metszési pontja, D_1 minden esetre az érintő baloldalán lesz. Ha M_1 az M pont felé közeledik, $\overline{MD}_1, \overline{MD}_2, \overline{MD}_3 \dots$ sorozatot nyerjük. Könnyen bebizonyítható, hogy ha \overline{MD}_i valamely határérték felé közeledik, akkor $\lim \overline{MD}_i = 2\rho$, azaz az M pontnak megfelelő görbületi sugár kétszerese. A görbületi középpont az \overline{MD} húr közepén lesz. Ha pedig \overline{MD}_i a választott $M_1, M_2, M_3 \dots$ pontok szerint más és más határ felé közeledik, akkor az M pontnak négy görbületi sugarat feleltetünk meg, egy legnagyobbat és egy legkisebbet jobbról jövet: $p + p''(a+0)$, $p + p''(a+0)$, továbbá egy legnagyobbat és legkisebbet balról jövet: $p + p''(a-0)$, $p + p''(a-0)$; a görbe konvexitásából következik, hogy a D_i pontok mind az érintő baloldalán vannak, tehát határpontjaik sem lehetnek az érintő jobboldalán, következésképpen minden a értéknél mind a négy görbületi sugár eleget tesz a következő egyenlőtlenségnek: $\rho \geq 0$.

A zárt konvex görbe kerületét CAUCHY egy tétele nyomán a következőleg fejezhetjük ki:

$$K = \int_0^{2\pi} \rho da. \quad (6)$$

A görbe kerületét CATALAN tétele szerint,²

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) da \quad (7)$$

² L. CAUCHY: Comptes Rendus 1841 p. 1060 és CATALAN: Mém. Soc. Liège 1886 p. 230. E képletek újabb bizonyítását adta W. BLASCHKE: Jahresb. der Deut. Math. Ver. 1914 p. 232.

adja, mely szintén az összes konvex zárt görbékre érvényes. Ugyanis könnyen meggyőződhetünk, ha poligonnal helyettesítjük görbénket, hogy a területelem $\frac{1}{2}p \cdot \Delta s$, ha ebbe Δs értékét 4)-ből behelyettesítjük és a határértékre megyünk át, akkor

$$2T = \int_0^{2\pi} p^2 da + \lim \Sigma p \cdot \Delta p'. \quad (7')$$

Parciális összegezés révén

$$\Sigma p(a) \cdot \Delta p'(a) = p(a)p'(a) - \Sigma p'(a + \Delta a) \cdot \Delta p(a)$$

miután pp' , 0 és 2π -nél ugyanazon értékeket veszi fel, tehát a (7') képlet csakugyan a (7)-be megy át, ha Δa zérus felé közeledik.

Eredményeinket összefoglalva kimondhatjuk, hogy minden zárt konvex görbét előállíthatunk oly $p(a)$ egyértékű, mindenütt folytonos, 2π periodussal bíró, egyenletesen konvergens FOURIER-sorba fejthető függvénynyel, melynek jobb- és baloldali differenciálhányadosai minden pontban végesek és meghatározottak. $p'(a+0)$ rendszeren egyenlő $p'(a-0)$ -val; azon irányok, melyekre ez nem áll, zérus mértékű halmazt alkotnak. A $p' = p'(a)$ függvény nem szükségképen folytonos ugyan, de konvergens FOURIER-sorba fejthető, p'' -re és ebből kifolyólag a görbületi sugárra ez már nem áll, azonban azon irányok is, melyekben p'' nem létezik, szintén zérus mértékű halmazt alkotnak. Rövidség kedvéért nevezzük az oly $p = p(a)$ függvényeket, a melyek a fenti feltételeknek megfelelnek, T_2 függvényeknek.

Mig minden konvex görbét ily függvény képvisel, addig viszont egy ily függvény nem állít elő szükségkép konvex zárt görbét,³ nevezzük az általa előállított görbét T_2 görbéknek (minden nem irányított egyenessel párhuzamos két és csak két érintőt húzhatunk hozzájuk). Szolgáljon például a nem konvex T_2 görbékre az asteroida:

$$p = a \sin 2a.$$

³ Ily esetben a p , a által meghatározott egyenes már nem támvonal, hanem érintő.

Vizsgáljuk meg, hogy mely esetben lesz a T_2 görbe konvex.

Láttuk, hogy a tangenciális poláris koordináta-rendszerben pozitív görbületi sugár esetén a görbületi központ az érintő baloldalán van, negatív ρ esetén pedig annak jobb oldalán; azon a értéknél, melynél ρ jelet változtat, a görbe az érintő egyik oldaláról a másikra megy át. Ha minden a értékénél a görbe négy görbületi sugara előjelét megtartja, akkor a görbe mindég az érintők ugyanazon oldalán marad, ez esetben a görbének elsőfajú fordulópontja nem lehet; inflexiós érintő és másodfajú fordulópontos érintő eleve ki van zárva, mert különben valamely iránynyal több, mint két párhuzamos érintője volna a görbének. A T_2 görbe tehát konvex zárt görbe lesz, ha ρ nem változtat jelet.

Ha valamely T_2 görbénél p' és p'' a nullától 2π -ig terjedő intervallumban folytonos, véges és határozott értékű, tehát a görbületi sugár is véges és folytonos, akkor a görbe azon pontja, melyen ρ jelváltozással válik zérussá, elsőfajú fordulópont. Miután $\rho(a) = \rho(a + 2\pi)$, tehát ez esetben ρ jelváltozással csak páros számú esetben lehet zérus, következésképp az ily T_2 görbének csak páros számú első fajú fordulópontja lehet.

Az (5) egyenletet, mely a görbületi sugarat a függvényeként állítja elő: $\rho = \rho(a)$, a T_2 görbe természetes koordinátákban kifejezett egyenletének tekinthetjük, azonban míg a $p = p(a)$ függvény a felsorolt megszorítások esetén mindég zárt T_2 görbét képvisel, addig, hogy (5) is zárt görbét állítson elő, még a következő két feltételt kell kielégítenie:

$$\int_0^{2\pi} \rho \sin a da = 0 \quad \int_0^{2\pi} \rho \cos a da = 0.$$

A (2) egyenlet által képviselt T_2 görbe $+n$ távolban levő párhuzamos görbéjének egyenletét azonnal felírhatjuk

$$p_1 = p + n \quad \text{vagy} \quad \rho_1 = \rho + n; \quad (8)$$

ugyanis a tangenciális poláris, valamint a természetes koordináta rendszerekben két párhuzamos görbe egyenlete csak egy

konstans tag által különbözik. Ha $-n$ nagyobb a (2) görbe legnagyobb görbületi sugarának abszolút értékénél, vagy n nagyobb a görbe legkisebb görbületi sugarának abszolút értékénél, akkor a (8) görbe minden esetre konvex lesz. Tehát a T_2 görbék párhuzamos görbéi közt, ha görbületi sugaruk korlátos, úgy pozitív, mint negatív irányban konvex görbékre jutunk.

A kerület és a terület (6) és (7) alatt adott képletei a T_2 görbéknél is megtartják értelmüket. A terület képletét parciális integrációval a következő alakra hozhatjuk:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p \rho da.$$

E képlet, ha ρ minden a értéknél véges és határozott értékű, előnyösen alkalmazható. A (7) által adott érték, mely független a koordináta rendszer kezdő pontjától és a tengely irányától, a görbe algebrai területét adja. A (6) által adott kerület szintén független a koordináta rendszer kezdő pontjától és a tengely irányától, ez értéket a görbe algebrai hosszának neveztük el.⁴ Jelöljük P -vel görbéink a iránynak megfelelő szélességét, azaz a és $a + \pi$ irányú érintők algebrai távolságát,

$$P(a) = p(a) + p(a + \pi),$$

akkor a kerület képletét így is írhatjuk:

$$K = \int_0^{\pi} P da;$$

konvex görbék esetén P a görbe vetülete az $a + \frac{1}{2}\pi$ irányú egyenesre. CAUCHY tételét ez alakban adta közre.

A nem konvex görbéknél P bizonyos értékei negatívak, úgy,

⁴ JORDAN-FIEDLER: Contribution à l'étude des courbes convexes fermées HERMANN Paris 1912 p. 28. A tangenciális koordináta rendszerben ha a kezdőpontot x_0, y_0 koordinátákkal bíró pontba toljuk a nélkül, hogy a tengely irányát megváltoztassa, akkor a $p = p(a)$ egyenlet a következő alakot veszi fel: $p = p - x_0 \sin a + y_0 \cos a$.

hogy oly görbék is vannak, melyek algebrai hossza zérus. A (2) által adott T_2 görbe evolutájának paraméteres egyenleteit az előbbiekből kifolyólag azonnal felírhatjuk:

$$p_1 = p'(a) \quad \alpha_1 = a + \frac{1}{2}\pi;$$

ez esetben

$$\int_0^{2\pi} p_1 d\alpha = 0.$$

Tehát a T_2 és speciálisan a zárt konvex görbék evolutáinak algebrai hossza mindig nulla.

Ha a (2) $p = p(a)$ függvényt FOURIER-sorba bontva gondoljuk, akkor a konstans tag a (6) képlet értelmében $\frac{K}{2\pi}$ -vel lesz egyenlő, a hol K a (2) görbe algebrai kerülete, úgy, hogy az oly függvények sorba fejtésénél, melyek zérus algebrai kerületű görbét ábrázolnak, a konstans tag hiányzik és viszont.

Láttuk, hogy a T_2 függvényeknél úgy p , mint p_1 konvergens FOURIER-sorba bontható; legyen

$$p = \frac{K}{2\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ia + b_i \sin ia),$$

akkor a p' sorba bontása a következő lesz:

$$p' = \sum_{i=1}^{\infty} i (b_i \cos ia - a_i \sin ia),$$

a hol tudvalevőleg

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p \cos i\alpha d\alpha \quad b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p \sin i\alpha d\alpha.$$

Írjuk fel a terület képletét (7) alapján a fenti együtthatók segítségével HURWITZ nyomán:⁵

$$T = \frac{K^2}{4\pi} - \pi \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (i^2 - 1) (a_i^2 + b_i^2).$$

⁵ HURWITZ: Sur quelques applications géométriques des séries de FOURIER, Annales de l'Ecole Normale supérieure t. XIX. 1902 p. 357—408.

Ebből következik, hogy valamennyi T_2 görbe közt, melyek algebrai hossza K , a kör az, melynek algebrai területe a legnagyobb; továbbá, hogy azon T_2 görbék, melyek algebrai hossza nulla, mindég negatív algebrai területtel bírnak.⁶

Térjünk át a T_2 görbék egy speciális esetére, melyeknél α minden értékénél

$$P = p(\alpha) + p(\alpha + \pi) = 0; \quad (9)$$

rövidség kedvéért nevezzük e görbéket T_1 görbéknek. Az irányítástól eltekintve e görbékhez minden adott egyenessel egy és csak egy párhuzamos érintőt húzhatunk; (9) értelmében ugyanis az α és $\alpha + \pi$ irányú érintők összeesnek, továbbá miután $p'(\alpha) = -p'(\alpha + \pi)$, a megfelelő érintési pontok is összeesnek, sőt a görbületi középpontok is. Ha az érintő szöge α , zérustól 2π -ig változik, az érintési pont kétszer futja be a görbét. Miután $-q(\alpha) = q(\alpha + \pi)$, ha q folytonos, a görbének páratlanszámú elsőfajú fordulópontja van.

A legegyszerűbb ily görbe a 3 fordulópontos hipocikloida: $p = a \sin 3\alpha$; ily görbét állít pl. még elő a következő egyenlet $p = F(\sin \alpha)$, ha $F(-x) = -F(x)$ és ha $p, p'(\alpha + 0)$ és $p'(\alpha - 0)$ meghatározottak és korlátosak. Ha $F(x)$ algebrai függvény, e görbe is algebrai lesz, ugyanis a tangenciális koordinátákban $p = p(\alpha)$ által adott görbe egyenlete xy koordinátákban parameteres alakban a következő:

$$x = p' \cos \alpha + p \sin \alpha \quad y = p' \sin \alpha - p \cos \alpha. \quad (10)$$

Szolgáljon transzcendens T_1 görbe példájául egy, alakra nézve a fenti 3 fordulópontos cikloishoz hasonló görbe, melynek egyenlete

$$p = \sin(\sin \alpha).$$

A (9) feltétel következtében a T_1 görbét előállító $p = p(\alpha)$

⁶ Más bebizonyítását lásd: Loc. cit. ⁴ p. 32.

függvény FOURIER-sorba bontásánál úgy az a_0 , mint az a_{2i} és b_{2i} együtthatók zérusok lesznek, úgy hogy csak a páratlan indexű tagok fognak e sorokban előfordulhatni.

Bizonyos transzformációknál a T_1 görbék ismét T_1 görbékbe mennek át. Legyen például:

1. Az evolutoida transzformáció. Az érintővel β szöget képező, az érintési ponton átmenő egyenes által burkolt görbének, az adott görbe β evolutoidájának egyenlete könnyen felírható tangenciális rendszerben:

$$p_1 = p \cos \beta + p' \sin \beta \quad a_1 = a + \beta \quad (11)$$

a (9) relációból következik, hogy $p_1(a) + p_1(a + \pi) = 0$

2. A tangenciális radiál transzformáció. Egy pontból kiindulva párhuzamost vonunk a görbe valamely görbületi sugarával, felmérjük reá a megfelelő görbületi sugár hosszát, a végpont mértani helye a görbe radiálja lesz;⁷ a végpontot át emelt merőleges burkoló görbéje pedig a tangenciális radiál

$$p_1 = p(a) + p''(a) \quad a_1 = a.$$

3. Az előbbinek ellentranszformációja, a tangenciális anti-radiáltranszformáció: $q_1 = p(a)$, $a_1 = a$. Ez a transzformáció a kezdő-ponttól függ; csak akkor ad, mint láttuk, zárt görbét, ha

$$\int_0^{2\pi} p \cos a da = 0$$

és

$$\int_0^{2\pi} p \sin a da = 0,$$

⁷ A radiál területe a fentiek után

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho (p + p'') d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p \varrho d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p' \varrho' d\alpha;$$

az utolsó integrál a görbe evolutájának területe, tehát, a görbe területe egyenlő radiálja és evolutája algebrai területeinek összegével.

miből (10) értelmében parciális integrációval

$$\int_0^{2\pi} x da = 0$$

és

$$\int_0^{2\pi} y da = 0$$

következik, tudvalevőleg ez csak akkor áll, ha a kezdőpont a görbületi súlypont. Tehát ezt a pontot véve kezdőpontul, a jelzett transzformáció a T_1 görbéket ismét T_1 görbéké alakítja át; megjegyzendő, hogy ez esetben a transzformáció konvex zárt görbét ismét konvex zárt görbévé, még pedig vele egyenlő hosszú görbévé alakít át.

T_1 görbét kapunk még, ha valamely T_2 görbe két párhuzamos érintője közt egyenlő távolban párhuzamos egyenest vonunk, ez az egyenes oly T_1 görbét burkol, melynek egyenlete

$$p_1 = \frac{1}{2} [p(a) - p(a + \pi)].$$

A T_1 görbék evolvensait a következő egyenlet adja:

$$p_1(a) = \int_0^a p(a) da + k, \quad (14)$$

tehát

$$p_1(a + \pi) = \int_0^{a+\pi} p(a) da + k,$$

miután azonban $p(a) = -p(a + \pi)$, tehát e görbék szélessége

$$P = p_1(a) + p_1(a + \pi) = 2k + \int_0^\pi p(a) da,$$

azaz a T_1 görbék evolvensai minden irányban egyenlő szélességű görbék, melyek ha k elég nagy, convex görbék. E görbéket EULER fedezte fel és körhöz hasonló tulajdonságaik miatt orbiformoknak nevezte őket. Erre vonatkozó közleménye 1778-ban az Academia Petropolitana kiadványában «De curvis triangularibus» cím alatt jelent meg, nagy meglepetést okozva, miután

addig azt hitték, hogy a kör az egyedüli görbe, melynek szélessége bármely irányban egyenlő.

(6) képletünkéből következik, hogy e görbék hossza egyenlő a velők egyenlő széles kör hosszával. E tulajdonságukat EULER még nem ismerte. BARBIER volt az, a ki ezt először közölte 1860-ban a Journal de Mathématiques Pures et Appliquées-ben.

Említsük fel röviden az orbiformoknak az eddigiekből következő két tulajdonságát. Az orbiformok minden normálisa kettős normális; a szemben fekvő pontok görbületi középpontjai összeesnek. Viszont minden T_2 görbé, melynek minden normálisa kettős normális, orbiform. Koordináta rendszerünkben könnyen felírhatjuk azt a feltételt, melyet a kettős normálisú T_2 görbék kielégítenek:

$$p'(a) = -p'(a + \pi).$$

Az integrációt végrehajtva: $p(a) + p(a + \pi) = \text{konst.}$ kapunk, azaz oly görbéket, melyek szélessége konstans.

EULER idézett cikkében s nyomában Loria (Spezielle alg. und transcendente ebene Kurven, Band I. 1910) az orbiformok általános egyenletét ebből a kettős normális tulajdonságból kiindulva vezette le, azonban e fejtegetésekbe hiba csúszott bele úgy, hogy az elért képletek hibásak. Nem kevésbé téves volt EULER ama nézete, hogy az orbiformok evolutái szükségképen az úgynevezett háromszögletű görbék; ugyanis mint láttuk, az orbiformok evolutája bármilyen T_1 görbe lehet. T_1 görbék pedig tetszőleges páratlan számú fordulóponttal birhatnak, például $p = a \sin (2n+1) a$ egy $2n+1$ fordulópontos hipocikloida.

Le kell tehát vezetnünk az orbiformok általános egyenletét. Induljunk ki a következő megfontolásból: a T_1 görbék párhuzamos görbéi $p_1 = p + n$ a (9) reláció értelmében állandó szélességgel, $2n$, birnak. Ezt tekintetbe véve könnyen felírhatjuk az orbiformok képletét x, y koordinátákban paraméteres alakban

$$x = (p+n) \sin a + p' \cos a \quad y = v' \sin a - (p+n) \cos a, \quad (14')$$

mely egyenletekben $p(\alpha)$ folytonos 2π periodussal bíró egyértékű függvény, mely eleget tesz a $p(\alpha) + p(\alpha + \pi) = 0$ feltételnek, továbbá p , $p'(\alpha + 0)$ és $p'(\alpha - 0)$ korlátosak és határozott értékűek.

Az orbiform területe (7) értelmében

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(p+n)^2 - p'^2] d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\alpha + n^2\pi,$$

azaz egyenlő a vele egyenlő hosszú kör területével hozzáadva a T_1 görbe algebrai területét, mely utóbbi, mint láttuk, negatív.

Az orbiform egyenlete természetes koordinátákban $\varrho_1 = \varrho(\alpha) + n$, a hol $\varrho(\alpha)$ a T_1 görbe görbületi sugara, továbbá n konstans. Szolgáljon például az orbiformokra néhány görbe, melyeket egybeült felemlítettünk.⁸ Először is a legegyszerűbb analitikai orbiform, melynek tangenciális poláris egyenlete $p = a + b \sin^3 \alpha$, továbbá vonalkoordinátákban egyenlete:

$$(u^2 + v^2 - bu^3)^2 = (u^2 + v^2)^3 a^2$$

a legegyszerűbb orbiform tehát egy hatodosztályú görbe.

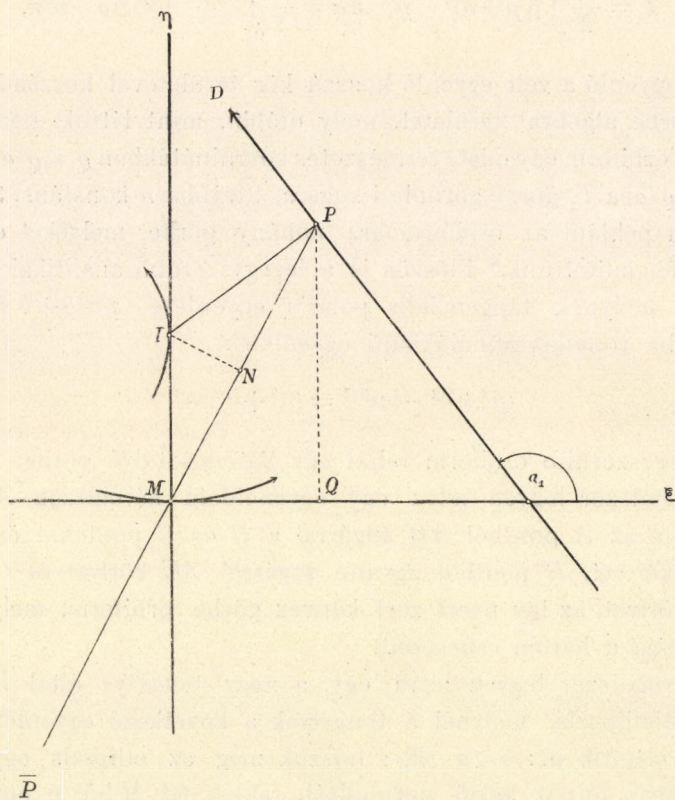
Másodszor legyen adva egy egyenoldalú háromszög ABC , írjuk le az A pontból AB sugárral a B és C pontokat összekötő körívet, B pontból ugyane sugárral AC körívet és C -ből AB körívet, az így nyert zárt konvex görbe orbiform, melynek evolútája a három csúcspont.

Harmadszor legyen adva egy, a nagy tengelye által határolt félellipszis, melynél a tengelyek a következő egyenlőtlenséget elégítik ki: $b < a < 2b$; húzzuk meg az ellipszis egy M pontjában annak belső normálisát, rakjuk fel M -ből e normálisra az $MN = 2a$ hosszát. Ha M a félellipszist befutja, az N pont oly görbét ír le, mely a fél ellipszist zárt konvex görbévé egészíti ki, a teljes görbe orbiform. E szerkesztés PUISEUX-tól

⁸ JORDAN-FIEDLER: Courbes Orbiformes, Archiv der Mathematik und Physik. Band XXI. p. 227.

ered. Természetesen nem szükséges, hogy az adott görbe épen félellipszis legyen.

Vezessük még le a T_1 görbék néhány tulajdonságát. Legyen adva egy ily görbe $p = p(\alpha)$, húzzuk meg annak egy M pontján érintőjét $M\xi$ -t és normálisát $M\eta$ -t; ha az M pont az adott görbét leírja, e két vonalat egy mozgó (ξ, η) koordináta



2. ábra, a hol $PQ = \eta$ $MQ = \xi$ $MI = \rho$.

rendszer tengelyeinek tekinthetjük. Legyenek p_1 α_1 valamely D egyenes koordinátái a mozgó rendszerben, p , α pedig a poláris tengelyül szolgáló ξ tengely koordinátái a fix rendszerben, akkor a D egyenes koordinátái ez utóbbira vonatkoztatva: p_2 , α_2 a következők:

$$p_2 = p_1 + p \cos \alpha_1 + p' \sin \alpha_1 \quad \alpha_2 = \alpha_1. \quad (15)$$

A (9) relációból következik, hogy minden a ξ η koordináta-rendszerhez változatlanul hozzáerősített egyenes (p_1 , α_1 állandók) állandó szélességű görbét, $2p_1$ szélességűt, burkol. A mi az eddigiek után világos is, miután a burkolt görbe, az adott T_1 görbe α_1 szögű evolutoidjának (11), tehát egy T_1 görbének párhuzamos görbéje. Miután e mozgásnál az η tengely a T_1 görbe evolutáján, tehát szintén egy T_1 görbén gördül, azt mondhatjuk, hogy valamely T_1 görbén gördülő egyenes síkjához erősített minden egyenes állandó szélességű görbét burkol.

Vizsgáljuk meg még e síkhoz erősített pontok által leírt görbéket.⁹ Legyenek ξ és η egy ily pont koordinátái a mozgó rendszerben, a hol ξ és η állandók, legyen továbbá ρ az adott T_1 görbe görbületi sugara az M pontban s I a megfelelő görbületi középpont; miután az η tengely a T_1 görbe evolutáján gördül és I ennek érintési pontja, tehát I a momentán forgási központ, következőleg a P által leírt görbe érintője merőleges az IP vonalra. Legyenek p_1 , α_1 ez érintő koordinátái a mozgó rendszerben, akkor

$$p_1 = \xi \sin \alpha_1 - \eta \cos \alpha_1, \quad \tan \alpha_1 = \frac{\xi}{\rho - \eta}, \quad (16)$$

ez értékeket (15)-be behelyettesítve megkapjuk görbénk tangenciális egyenletét parameteres alakban:

$$p_2 = (p - \eta) \cos \alpha_1 + (\xi + p') \sin \alpha_1 \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha. \quad (17)$$

Ha n -nel jelöljük IP -t a momentán centrum távolságát a P ponttól, akkor

$$n^2 = \xi^2 + (\rho - \eta)^2$$

⁹ E görbékről szóló közleményünk, a mennyiben a mai rendkívüli viszonyok meg nem akadályozták, a Tohoku Imperial University kiadványában a Tohoku Mathematical Journal 1914. évfolyamában jelent meg On a particular case of closed convex curves czímen.

$n \sin \alpha_1 = \xi$ és $n \cos \alpha_1 = \varrho - \eta$. Legyenek r és φ a P pont poláris koordinátái a mozgó rendszerre vonatkoztatva, akkor

$$p_2 = \frac{1}{n} [p\varrho - (p+\varrho)\eta + r^2 + \xi p']. \quad (17')$$

A P pont által leírt görbe görbületi sugarát SAVARY formulája¹⁰ segítségével felírhatjuk:

$$\varrho_2 = \frac{n^3}{n^2 - \xi \varrho'}. \quad (18)$$

Ha ξ és η elég nagyok, hogy $n^2 - \xi \varrho' = (\varrho - \eta)^2 + \xi(\xi - \varrho') \geq 0$ minden a értéknél, akkor a görbületi sugár jelét meg nem változtatja, továbbá miután (16) és (17')-ből következik.

$$\frac{da_2}{da} = \frac{n^2 - \varrho' \xi}{n^2} = \frac{n}{\varrho_2},$$

ez esetben α_2 az a szög monoton függvénye, tehát a (17) görbe zárt konvex görbe lesz.

A görbe hosszát, gördülő mozgásról lévén szó, a hol $\frac{ds_2}{da} = n$ (ds_2 a P pont által leírt görbe íveleme), a következő képlet adja

$$K = \int_0^{2\pi} n da. \quad (19)$$

Területe pedig a (17') felhasználásával a következő:

$$T = \frac{1}{2} \int p_2 ds_2 = \frac{1}{2} \int p_2 n da = \frac{1}{2} \int p \varrho da + r^2 \pi, \quad (19')$$

azaz egyenlő az adott T_1 görbe és azon kör területeinek összegével, melynek sugara r , a P pont távolsága az M ponttól.

¹⁰ Ha a C görbe a \bar{C} görbén gördül és I a momentán központ, egy a C görbe síkjához erősített P pont és a P által leírt görbe görbületiközpontja \bar{P} közt SAVARY a következő relációt mutatta ki:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{r} \right) \cos \psi$$

a hol $\bar{\varrho}$ és ϱ a \bar{C} és C görbék görbületi sugarai az I pontban, ψ az I ponthoz tartozó normális szöge a PI egyenessel, $PI = r$ és $\bar{PI} = \bar{r}$; a jelen esetben $\varrho = \infty$, $\bar{\varrho} = \varrho'$, $r = n$, $\bar{r} = \varrho_2 - n$, $\psi = \alpha_1 - \frac{\pi}{2}$.

Tehát ha a mozgó koordináta rendszerben az M pontból kört írunk le, a kör összes pontjai a mozgásnál egyenlő területű görbéket írnak le. Ha r elég nagy, úgy konvexek is lesznek mindannyian, pl. ha $r > \varrho' + 2\varrho$.

Jelöljük τ -val a TPM szöveget, melyet az érintő a rádius vektorral zár be, $\tau = \pi - \alpha_1 + \varphi$

$$\tan \tau = \frac{\varrho \sin \varphi - r}{\varrho \cos \varphi}. \quad (20)$$

Ha az $M\xi$ érintő π szöveget ír le, T_1 görbéről lévén szó, az M pont kiindulási helyére jut vissza, a P pont pedig \bar{P} -be, az M -re vonatkoztatott szimmetrikusába ér, a PP húr hossza 2γ lesz. Jelezzük $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\tau}$, $\bar{\varrho}_2$, \bar{n} , $\bar{\varrho}$ -val α_1 , τ , ϱ_2 , n , ϱ -nak a \bar{P} pontban felvett értékeit; felhasználva, hogy T_1 görbéknél $\varrho = -\bar{\varrho}$, ezen értékek közt a következő összefüggés áll fenn:

$$\left. \begin{aligned} \cot \alpha_1 + \cot \bar{\alpha}_1 &= -2 \tan \varphi = \text{konst} \\ \tan \tau + \tan \bar{\tau} &= 2 \tan \varphi \\ \frac{n^3}{\varrho_2} + \frac{\bar{n}^3}{\bar{\varrho}_2} &= n^2 + \bar{n}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Legyen S a P pont által leírt görbe azon ívének hossza, mely a PP húr baloldalán fekszik, A pedig ezen ív és a húr által határolt terület, akkor miután $dS = d\bar{s}_2 - ds_2$, továbbá mert a PP húr, mely szilárdan van a mozgó rendszerhez kötve, egy oly T_1 görbét burkol, melynek érintési pontja az I momentum centrumból a húrra bocsájtott merőleges talppontja N és $MN = \varrho \sin \varphi$, tehát

$$\frac{dS}{d\alpha} = \bar{n} - n \quad \frac{dA}{d\alpha} = \frac{1}{2} (r + \varrho \sin \varphi)^2 - \frac{1}{2} (r - \varrho \sin \varphi)^2 = 2\varrho\gamma. \quad (22)$$

Vizsgáljuk még meg görbénk néhány speciális esetét. Legyen először is $\xi = 0$ vagyis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, (18) és (19) képleteinkből következik, hogy

$$\tau = \bar{\tau} = \frac{1}{2}\pi \quad \varrho_2 = n = \gamma - \varrho \quad \bar{\varrho}_2 = \bar{n} = \gamma + \varrho.$$

PP húr hossza állandóan 2γ , továbbá a P pont által leírt görbe érintői e húr végpontjain, a húrra merőlegesek, követ-

kezőleg a kérdéses görbe állandó szélességű görbe. Tényleg $\varrho_2 + \bar{\varrho}_2 = 2\eta$, tehát az η tengely pontjai mind orbiformokat írnak le; a mi az előzmények után magától értetődik, ugyanis e görbék az adott T_1 görbe evolutájának, tehát egy másik T_1 görbének evolvenssei s ezek mint láttuk orbiformok.

Térjünk át a második speciális esetre, melyben $\eta = 0$ azaz $\varphi = 0$, nevezzük rövidség kedvéért e görbékét O görbéknek (rövidítés ORBIS-ból, ugyanis látni fogjuk, hogy e görbék a körhöz hasonló tulajdonságokkal birnak,) (18), (20), (21) képletünk-ből következik, hogy ez esetben

$$n = \bar{n} = \sqrt{\varrho^2 + \xi^2}, \quad \varrho_2 = \frac{n^3}{\varrho^2 + \xi^2 - \xi\varrho}, \quad \tau = \pi - \bar{\tau} = -\arctan \frac{\xi}{\varrho}$$

tehát a PP húr végpontjain az O görbéhez vont érintők egyenszerű háromszöget alkotnak a húrral. Továbbá (22)-ből következik, hogy

$$\frac{dS}{da} = 0 \quad \frac{dA}{da} = 0,$$

azaz az állandó 2ξ hosszúságú húr baloldalán fekvő ív, valamint a terület is a mozgás tartama alatt változatlan marad. Miután a húr T_1 görbét burkol,

$$S(a + \pi) = S(a),$$

tehát $S(a) = \frac{1}{2}K$, ugyanez oknál fogva $A(a) = \frac{1}{2}T$.

Ha tehát adva van egy O görbe, s annak bármely pontját összekötjük a görbe azon pontjával, mely az előbbbitől számítva a görbe *kerületét felezi*, az így nyert *húr hossza állandó lesz*, s ezen húr a görbe *területét is két egyenlő részre osztja*, azonkívül a húr végpontjain húzott érintők a húrral *egyenlőszárú háromszöget alkotnak*; ezek a tulajdonságok azok, melyek az O görbét közeli vonatkozásba hozzák a körrel.

A PP húr burkoló görbéje ez esetben maga az adott T_1 görbe és érintési pontja a húr közepe; következőleg az O görbék a T_1 görbék ekvitangenciális görbéi, ezeket úgy nyerjük, hogy a görbe érintőire konstans hosszúságot rakunk fel: a vég-

pontok mértani helye a keresett görbe. A $p = p(a)$ görbe ekvítangenciális transzformáció által a következőbe megy át, mint az (10)-ből következik:

$$x = (\xi + p') \cos a + p \sin a, \quad y = (\xi + p') \sin a - p \cos a, \quad (23)$$

ezen egyenletek az O görbék egyenletei xy koordinátákban paraméteres alakban, melyekben $p = p(a)$ oly folytonos egyértékű korlátos 2π periodusu függvény, mely minden a értéknél határozott értékű, véges, folytonos differenciálhányadossal bír, továbbá ugyancsak minden a értéknél eleget tesz a következő feltételnek $p(a) + p(a + \pi) = 0$.

Ha p a $\cos a$ -nak algebrai függvénye, úgy a $p = p(a)$ görbéből levezetett O görbék is algebrai görbék lesznek. A legegyszerűbb ily görbe $p = a \sin 3a$ -nak ekvítangenciális görbéje; azonban a kiküszöbölése a (23) egyenletekből már ez esetben is 8-adfokú görbére vezet.

Az O görbék kerületét a (19) képlet adja

$$K = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \xi^2} da,$$

tehát kerületük sohasem kisebb a ξ sugarú kör kerületénél.

Az O görbe területét a (19') képlet szolgáltatja; miután mint láttuk a T_1 görbének területe sohasem lehet pozitív, tehát ezen görbék dacára annak, hogy hosszabbak a ξ sugarú körnél, területük mégis kisebb.

Befejezésül emlitsük még meg, hogy ha G -vel jelöljük a görbének a PP húrtól balra eső íve és a húr által határolt terület súlypontját, akkor, ha P pont az O görbét befutja, a G pont mértani helye egy $\frac{4\xi^3}{3T}$ sugarú kör lesz, melynek középpontja az egész görbe területének súlypontja. A kör érintője a G pontban pedig párhuzamos a PP húrral. Ha a húrtól balra fekvő ív súlypontját G_1 -el jelöljük s ennek mértani helyét keressük, azt találjuk, hogy a G_1 pont mértani helye egy középponttal bíró zárt konvex görbe, melynek görbületi sugara

$$\bar{\rho}_3 = \frac{4\xi}{K} n;$$

továbbá érintője a G_1 pontban párhuzamos a PP húrral. Minthogy

$$\int_0^{2\pi} n da = K,$$

e görbe kerülete egyenlő 4ξ -vel azaz a PP húr kétszeres hosszával.¹¹

Jordan Károly és Fiedler Raymund.

¹¹ Az orbiformokkal kapcsolatos irodalomból felemlítjük EULER, BARBIER, HURWITZ⁵, JORDAN-FIEDLER⁴, 8, 9, alatt felsorolt munkáin kívül, MINKOWSKI: Über die Körper konstanter Breite, (Abhandlungen Band II. p. 277) továbbá TEIXEIRA: Sur les courbes orbiformes d'EULER et sur une généralisation de ces courbes (Archiv Band 23. p. 27) végre E. CZUBER: Orbiforme Kurven (Zeitschrift für das Realschulwesen XL. p. 237—352, 385—397).

Legyen szabad ez utóbbi értekezés egy tévedését helyreigazítani. CZUBER EULER nézetét osztva azt állítja (p. 397), hogy az orbiformok evolutái csak három fordulóponttal (point de rebroussement de première espèce) bíró görbék lehetnek. Az előzőkben láttuk, hogy bármely T_1 görbe evolvense orbiform, továbbá, hogy e görbék, ha folytonosak, $2n+1$ fordulóponttal bírnak; például szolgáltat egy hypocykloida $p = \sin(2n+1)\alpha$, melynél a sugarak aránya $n:2n+1$; e görbe $2n+1$ fordulóponttal bír; úgy evolvensei, mint párhuzamos görbéi orbiformok.

CZUBER említett cikke nyomán általánosíthatjuk a T görbék fogalmát; tekintsük azon görbéket, melyek érintői csak $(2\nu+1)\pi$ szög monoton leírása után térnek vissza kezdő helyzetükbe, ezek egyenletét x, y koordinátákban a (10) egyenletek adják, ha azokban p α -nak oly függvénye, melynek legkisebb periodusa $2\pi(2\nu+1)$, s mely eleget tesz minden α értékénél a $p(\alpha) + p[\alpha + (2\nu+1)\pi] = 0$ (23) feltételnek. E görbék evolvensei, valamint párhuzamos görbéi, oly zárt görbék, melyeket állandó szélességű görbéknek tekinthetünk oly értelemben, hogy e görbék α és $\alpha + (2\nu+1)\pi$ irányú érintőinek távolsága állandó, a miből azután következik, hogy normálisaik kettős normálisok s hogy az ezeknek megfelelő görbületi középpontok összeesnek. Tangenciális egyenletükből $p = p(\alpha) + k$, melyben $p(\alpha)$ eleget tesz a (23) feltételnek, következik, hogy e görbék hossza $2\pi(2\nu+1)k$, azaz $2\nu+1$ -szer akkora, mint a vele egyenlő szélességű kör hossza. Ezek a görbék a CZUBER által általánosított orbiformok. Evolutáiknak fordulópontszáma, mint EULER orbiformjainál is, tetszőleges nagy páratlan szám lehet; hosszuk nem függ a fordulópontok számától, ellentétben CZUBER állításával. Legyen például egy ily görbe: $p = \sin \frac{2n+1}{2\nu+1} \alpha + k$, a hol $2n+1$ és $2\nu+1$ relativ primszámok; e görbe hossza $(2\nu+1)2\pi k$, evolutája pedig egy $2n+1$ fordulópontos hypocykloida, melynél a sugarak aránya $n-\nu:2n+1$.

A GÖMB FÖKÖREIRŐL, MINT LEGRÖVIDEBB VONALAKRÓL.

Adva lévén egy gömbnek két tetszésszerű pontja, e pontokat a gömb felületén végtelen sok vonallal köthetjük össze. Ha az adott pontok nem fekszenek egymással diametrálisan szemközt, akkor egy, félkörnél kisebb főkörívvel is összeköthetők. *E főkörív minden más összekötő vonalnál rövidebb.* Diametrálisan szemközt fekvő pontok végtelen sok félkörnagyságú (tehát egymás közt egyenlő) főkörívvel köthetők össze. *E főkörívek minden más összekötő vonalnál rövidebbek.*

Czélunk a gömbi főkörök most elmondott tulajdonságait a lehető legegyszerűbb úton bebizonyítani, kikerülve a variációszámítás megszokott módszereit. A bizonyítás alapgondolata nagyjában az, hogy az összehasonlítandó görbéken korrespondáló elemeket állapítunk meg és kimutatjuk az egyik görbe elemeinek minimumtulajdonságait. E gondolat már JOHANNES BERNOULLI-nál található, a ki a brachistochrona meghatározására alkalmazta;¹ újabban CARATHÉODORY általános variációszámítási problémák megoldására is felhasználta.²

*

Legyenek A és B a gömbfelület adott pontjai és rajzoljunk az A és B pontokon át főkört, azaz olyan kört, a melynek középpontja a gömb középpontjában, O -ban van. Az A és B

¹ J. BERNOULLI: *Opera omnia*, t. II. p. 266.

² C. CARATHÉODORY: *Sur une méthode directe du Calcul des variations*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XXV (1908), p. 36.

pontok két ivre osztják a főkört: jelöljük λ -val a kisebbik ívet vagy — ha a két ív egyenlő volna — az ívek egyikét. Legyen L egy tetszésszerű folytonos vonal a gömb felületén, a mely az A és B pontokat összeköti.

Azt állítjuk először is, hogy az L ív hossza nem lehet kisebb a λ ív hosszánál.

Értelmezzük mindenekelőtt egy folytonos vonal ívhosszát. Folytonos vonal a tér olyan (x, y, z) pontjainak összességét jelenti, a mely pontok koordinátái egy t változónak («paraméternek») valamely

$$a \leq t \leq b$$

intervallumban egyértékű és folytonos függvényei:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

A vonal két pontja P_1 és P_2 közül P_1 akkor előzi meg a P_2 -t, ha a P_1 -hez tartozó t_1 paraméterérték kisebb, mint a P_2 -höz tartozó t_2 paraméterérték; P_3 a P_1 és P_2 között van, ha — t_1, t_2, t_3 -mal jelölven a megfelelő paraméterértékeket — t_3 a t_1 és t_2 értékek között van. Válasszunk már most az adott vonalon egy AB ívet; ezen ív hosszúságát a következőkép értelmezzük. Vegyünk fel az A és B pontok között az illető vonalon egy P_1 pontot, azután P_1 és B között egy P_2 pontot és így tovább, végre P_{n-1} és B között egy P_n pontot, a hol n tetszésszerű pozitív egész szám. Kössük össze egyenesekkel az A és P_1 , továbbá a P_1 és P_2 és így tovább végre a P_n és B pontokat. Az összes ily módon alkotható $AP_1P_2 \dots B$ «beirt» törtvonalak hosszainak felső határa lesz az AB ív hossza.¹ Ha e felső határ véges, az AB ív rektifikálható.

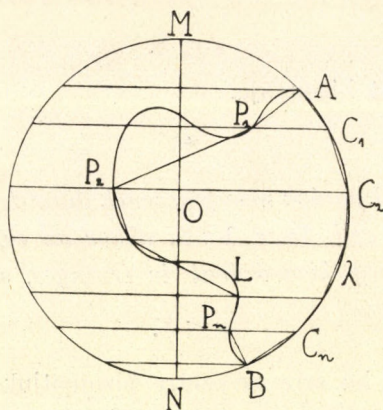
Az A és B pontokon át fektetett főkörön vegyünk fel egy

¹ L. például PEANO: *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale* (Torino, 1887), p. 161.

LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, (Paris, 1904), p. 59.

BEKE: *Differenciál- és integrálszámítás*, I. (Budapest 1910), p. 475.

MN átmérőt, (1. ábra) mely az A és B pontokat ne válassza szét (ez átmérő végpontjai esetleg összeeshetnek A és B -vel); nevezük röviden tengelynek az MN átmérőt és parallelköröknek azon köröket a gömb felületén, a melyeknek síkjai a tengelyre merőlegesek. (A parallelkörök középpontjai mind a tengelyen vannak.) Írjunk be most a λ ívbe polygonvonalat, a melynek csúcsai $A, C_1, C_2, \dots, C_n, B$ legyenek és fektessünk e csúcson át parallelköröket. A C_1 -en átmenő parallelkör elválasztja a gömbön az A és B pontokat; a folytonos függvények alap tulajdonságai szerint lesz tehát az L vonalon egy olyan *első*



1. ábra.

P_1 pont, a mely e parallelkörön fekszik. A C_2 ponton átmenő parallelkör elválasztja az előbbi parallelkört és a B pontot, tehát a P_1 és B pontokat; ennél fogva lesz a P_1 után egy első P_2 pont az L vonalon, a mely egyszersmind a C_2 -n átmenő parallelkörön fekszik és így tovább. Megszerkesztvén a C_1, C_2, \dots, C_n pontoknak megfelelő P_1, P_2, \dots, P_n pontokat, nyertünk egy, az L ívbe beírt $AP_1P_2\dots P_nB$ törtvonalat. Elemi megfontolásból — a melyre teljesség kedvéért vissza fogunk térni — világos, hogy

$$\begin{aligned} AC_1 &\leq AP_1 \\ C_1C_2 &\leq P_1P_2 \\ &\vdots \\ C_nB &\leq P_nB, \end{aligned}$$

tehát (az egymásmellé irt csúcspontok neveivel jelölván mindjárt a törtvonal hosszát)

$$AC_1C_2\dots B \leq AP_1P_2\dots B$$

A jobboldalon álló mennyiség nem lehet nagyobb az L iv hosszánál, S -nél, tehát

$$AC_1C_2\dots B \leq S.$$

Minthogy ez az egyenlőtlenség a λ ívbe beírt minden törtvonal hosszára nézve fennáll, fenn fog állani e törtvonalak hosszainak felső határára, azaz a λ ív hosszára, s -re nézve is

$$s \leq S,$$

a mi állításunkat bizonyítja.

★

Ha az A és B pontok nem fekszenek diametrálisan szemközt, továbbá L nem esik össze λ -val, akkor az előbbi egyenlőtlenség az egyenlőség kizárásával is érvényes, azaz

$$s < S.$$

E tételt elég, ha arra az esetre bizonyítjuk be, a midőn az L vonal két főkörívből, az AB és PB főkörivekből áll (2. ábra). Nagyon egyszerűen megmutathatjuk ugyanis, hogy az APB gömbháromszögre nézve nem állhat fenn az

$$AB = AP + PB$$

egyenlőség,¹ ha az AB ív különbözik egy félkörtől. Tegyük fel, hogy az egyenlőség helyes. Ekkor van az AB íven oly C pont, hogy

$$AC = AP$$

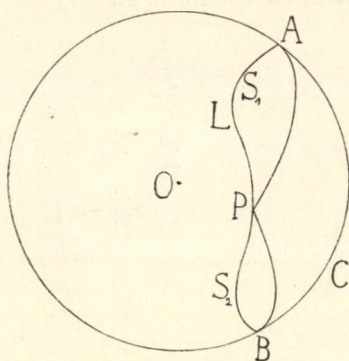
$$CB = PB,$$

tehát az A , B és O pontok mindegyike egyenlő távol van a

¹ AB -vel mindjárt az AB főkörív hosszát jelöltük.

P és C pontoktól. A P és C pontoktól egyenlő távolságban levő pontok geometriai helye sík, e síkot az A, B, O pontok teljesen meghatározzák (a feltétel értelmében A, B és O nincsenek egy egyenesen!), e sík továbbá a C ponton átmegy. Ez csak úgy lehetséges, hogy P és C összeesnek, azaz P az AB íven fekszik. De ekkor APB nem gömbháromszög.

Visszatérve már most arra az esetre, midőn L akármilyen, a λ főkörívvel össze nem eső vonal, válasszunk az L vonalon egy P pontot, mely ne essék egyszersem a λ ívre. Kössük össze



2. ábra.

legfeljebb félkörnagyságú körívvel az A és P , továbbá a B és P pontokat. Jelöljük S_1 és S_2 -vel az L ív A és P , továbbá P és B pontok közé eső darabjainak hosszait és mint előbb AP és PB -vel a főkörívek hosszait.

A már bebizonyított tétel szerint

$$AP \leq S_1$$

$$PB \leq S_2,$$

tehát

$$AP + PB \leq S_1 + S_2 = S,$$

azonban — minthogy feltevésünk szerint a λ ív kisebb egy félkörnél —

$$s = AB < AP + PB,$$

ennélfogva

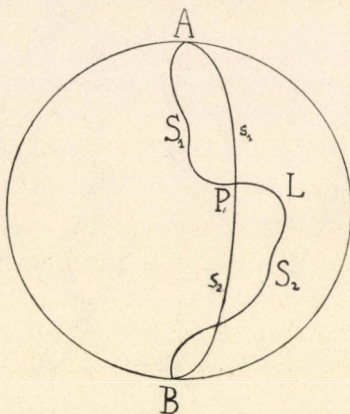
$$s < S.$$

★

Ha végre A és B diametrálisan szemközt fekszenek és az L vonal nem főkör, akkor is

$$s < S.$$

Válasszunk ugyanis az L vonalon egy P pontot, mely sem A , sem B -vel ne essék egybe (3. ábra). Az A , P és B pontok meghatá-



3. ábra.

roznak egy félkörnagyságú főkörívet, legyen ennek AP darabja s_1 PB darabja s_2 hosszúságú és hasonlóképpen legyenek S_1 és S_2 az L vonal AP és PB darabjainak hosszai. Minthogy s_1 és s_2 egyenkint kisebbek egy félkörnél és minthogy az L vonal nem esik össze az APB főkörívvel, az

$$s_1 \leq S_1$$

$$s_2 \leq S_2$$

egyenlőtlenségeknek legalább egyike az egyenlőség kizárásával is érvényes, tehát

$$s = s_1 + s_2 < S_1 + S_2 = S.$$

★

Kiegészítésül az elmondottakhoz bizonyítsuk be azt az elemi tételt, hogy *két parallelkőrön egy-egy pontot választván, ezeknek távolsága akkor a legkisebb, ha e pontok a tengellyel egy síkban, a tengelynek ugyanazon az oldalán vannak.*

Legyen (4. ábra) A az egyik parallelkör egy pontja és B a másik parallelkörnek azon pontja, a mely a tengely és az A pont által meghatározott síkban, a tengelytől számítva A -val egy oldalon fekszik; legyen C a második parallelkörnek tetzésszerinti B -től különböző pontja.

Elég megmutatnunk, hogy

$$AB < AC.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

az első parallelkör sugara nem nagyobb, mint a másodiké.

Vetítsük az A pontot a második parallelkör síkjára: az A' vetület az MB sugárra (M a második parallelkör középpontja), az M és B pontok közé esik. Az MCA' háromszögben

$$MC < MA' + A'C$$

tehát

$$A'B = MB - MA' = MC - MA' < A'C$$

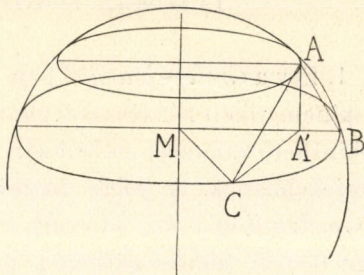
az $AA'B$ és $AA'C$ derékszögű háromszögeknek egy befogója közös lévén, végre tehát

$$AB < AC.$$

★

Megjegyezzük még, hogy e dolgozat elején (az $s \leq S$ egyenlőtlenség bizonyítására) alkalmazott módszer szószerint használható annak bebizonyítására is, hogy minden forgásfelületen a meridiánok geodetikus vonalak.

Szücs Adolf.



4. ábra.

TÉRBELI JORDAN-GÖRBÉKRŐL.

1. Egy a *Crelle-Journal*-ban megjelent dolgozatomban ¹ azzal a (kinematikai) kérdéssel foglalkoztam, hogy mily feltétel alapján tekinthető valamely síkbeli zárt mozgás egy térbeli JORDAN-mozgás projekciójának. A jelen dolgozatban kimutatom, hogy *tisztán geometriailag véve, bármely* folytonos görbe (mint pontthalmaz) egy térbeli JORDAN-görbének projekciója. A keresett jellegzetes (vagyis szükséges és elegendő) feltétel tehát a síkbeli zárt mozgásnak valami kinematikai, nem pedig a pályagörbe valamilyen geometriai tulajdonsága.

A kérdés eredete el van mondva az 1. alatt idézett dolgozat bevezetésében. A kérdés pontos fogalmazásában azonban, (hogy e dolgozat önmagában is olvasható legyen) elkerülöm az utalásokat; inkább megismétlek néhány definíciót és közlöm (bizonyítás nélkül) az idézett dolgozat főeredményét.

2. Legyenek $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ a $0 \leq t \leq 2\pi$ darabon definiált folytonos függvények; legyen

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi), \quad \psi(0) = \psi(2\pi), \quad \chi(0) = \chi(2\pi),$$

viszont legyen a $0 \leq t < 2\pi$ időközben

$$[\varphi(t_1) - \varphi(t_2)]^2 + [\psi(t_1) - \psi(t_2)]^2 + [\chi(t_1) - \chi(t_2)]^2 > 0,$$

ha

$$t_1 \neq t_2.$$

Ekkor az $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ görbét 2π körülfutási idejű JORDAN-görbének nevezzük.

¹ PÁL: Ueber Funktionen, die JORDAN-sche Gebilde darstellen. Journal für r. u. a. Mathem., t. 145 (1914), p. 1 stb.

A fönntemlitett kérdés most már a következő: Adva vannak a $0 \leq t \leq 2\pi$ darabon a folytonos $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ függvények, melyeknél

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \quad \text{és} \quad \psi(0) = \psi(2\pi).$$

Létezik-e kiegészítő $\chi(t)$ függvény olyképen, hogy φ , ψ és χ egy 2π körülfutási idejű JORDAN-görbét adjanak?

Ha a φ és ψ függvényeknek van $\frac{2\pi}{n}$ alakú közös periodusuk, (hol n valamely 1-nél nagyobb egészszám), akkor kiegészítő függvény nem létezik.¹ Tegyük fel tehát, hogy φ -nek és ψ -nek ily közös periodusa nincs. Ekkor kiegészítő függvény létezésének elegendő, de nem szükséges feltétele, hogy az

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

görbének létezzék *egy* egyszerű pontja, vagyis olyan, mely a $0 \leq t < 2\pi$ időköz csak egyetlen egy t -értékének felel meg.²

3. E feltétel megadását a következő megjegyzés követi: «Die Frage nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz einer Ergänzungsfunktion scheint mir, da so wenig postulirende hinreichende Bedingungen noch immer nicht notwendig sind, nicht unwesentliche Schwierigkeiten zu verursachen.»

A kérdéses szükséges és elegendő feltételt ma sem tudom megadni. Az alábbi tétel azonban annyit megmutat, hogy a feltétel tisztán kinematikai, nem pedig geometriai természetű.

4. Adva van egy

$$x = f(\tau), \quad y = g(\tau), \quad a \leq \tau \leq b$$

folytonos (zárt vagy nyílt) görbe, mely nem egy pontból áll. Akkor létezik olyan

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

¹ Lásd l. c. 1., p. 3.

² Lásd l. c. 1., p. 7, hol egy ennél is általánosabb elegendő, de nem szükséges feltétel van megadva.

JORDAN-görbe, melynek $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ projekciója (mint ponthalmaz) azonos az $x = f(\tau)$, $y = g(\tau)$ görbével.

Bizonyítás: Vegyünk az $x = f(\tau)$, $y = g(\tau)$ görbén két egymástól különböző pontot; legyenek ezek P_1 és P_2 . Vegyük ezután mindazon τ -értékeket, melyek e P_1 és P_2 pontokat szolgáltatják; e τ -értékek összessége egy (az $a \leq \tau \leq b$ darabra eső) zárt halmazt képez. E halmaz kiegészítő intervallumai közt van bizonyára oly (a', b') intervallum is, melynél a $\tau = a'$ és $\tau = b'$ pontok egyike a P_1 , másika a P_2 . Szolgáltassa pl. $\tau = \tau_1$ a P_1 , $\tau = \tau_2$ a P_2 pontot. Vegyük a (τ_1, τ_2) intervallumon azon τ_1 -hez legközelebb eső τ -értéket, mely P_2 -t szolgáltatja; nevezzük e τ -értéket $\tau = b'$ -nak. Utána vegyük a (τ_1, b') darabon azon b' -hoz legközelebb eső τ -értéket, mely a P_1 -pontot szolgáltatja. Ez az érték legyen $\tau = a'$.

Az ilyen (a', b') intervallumot (a P_1 és P_2 pontokra vonatkozó) hidintervallumnak nevezem. Két hidintervallumnak (a szó jelentése értelmében) közös belső pontja nincsen. Ezért s mert folytonos függvény egyenletesen folytonos, a hidintervallumok száma véges. Legyenek ezen intervallumok

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n).$$

Az ezen időközökben leírt íveket jelöljük

$$I_1, I_2, \dots, I_n\text{-nel.}$$

Problémánk értelmében egy oly I_r ív, mely (mint ponthalmaz) egy másik I_s ívnek része, figyelmen kívül hagyható. Ezért a priori felteszem, hogy az I_r és I_s ívek mindegyikén van olyan pont, mely a másiknak nem pontja; n tehát az ilyen egymásban nem foglalt $P_1 P_2$ -ívek számát jelentse.

Végül a jelölések egyszerűsítésére készítsünk az I_r ívek számára új parameter-előállítást; legyen ez:

$$x = f_r(\tau), y = g_r(\tau), 0 \leq \tau \leq 1, r = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Mindegyik ívnél $\tau = 0$ a P_1 , $\tau = 1$ a P_2 pontot szolgáltatassa.

Az (ab) intervallumból az (a_r, b_r) intervallumokat kiemelvén, legyenek a megmaradó darabok

$$(c_1, d_1) (c_2, d_2) \dots, (c_m, d_m).$$

Egy $c_i \leq \tau \leq d_i$ időben leírt ív vagy a P_2 , vagy P_1 ponttól véges távolságban marad. Osszuk eszerint ezen íveket két csoportba és olvassuk össze az egy csoportba tartozókat az i_1 , illetve i_2 ívekbe, melyeket új parameterrel a következő módon állítunk elő:

$$x = \varphi_1(\tau), y = \phi_1(\tau), \text{ illetve } x = \varphi_2(\tau), y = \phi_2(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq$$

Ha adott görbénknél i_1 (vagy i_2) ív nem léteznék, akkor az alábbiakban $\varphi_1(\tau)$ és $\phi_1(\tau)$ [vagy $\varphi_2(\tau)$ és $\phi_2(\tau)$] helyébe állandók és pedig P_1 (vagy P_2) megfelelő koordinátái teendők. E megjegyzés árán egyszerűbb esetek külön megbeszélése felesleges.

Mint a következőkből közvetlenül látható lesz, teljesen elegendő az $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ esetek tárgyalása. (Az ezeknél alkalmazott lépések ismétlése elintézi az $n > 3$ eseteket is.) Ezen három eset közül pedig az első két eset néhány szóban elintézhető.

5. Legyen $n = 1$. A JORDAN-görbét ilyenkor a következő 8 ívből teszem össze:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad x &= \varphi_1(\tau), & y &= \phi_1(\tau), & z &= -\tau; \\ 2^\circ \quad x &= \varphi_1(1), & y &= \phi_1(1), & z &= -\tau - 1; \\ 3^\circ \quad x &= f_1(\tau), & y &= g_1(\tau), & z &= -\tau - 2; \\ 4^\circ \quad x &= f_1(1), & y &= g_1(1), & z &= \tau - 3; \\ 5^\circ \quad x &= \varphi_2(\tau), & y &= \phi_2(\tau), & z &= \tau - 2; \\ 6^\circ \quad x &= \varphi_2(1), & y &= \phi_2(1), & z &= \tau - 1; \\ 7^\circ \quad x &= f_1(1 - \tau), & y &= g_1(1 - \tau), & z &= \tau; \\ 8^\circ \quad x &= f_1(0), & y &= g_1(0), & z &= -\tau + 1. \end{aligned}$$

A τ parameter az ívek mindegyikénél 0-tól 1-ig nő.

Hogy e nyolcz ívből összetett görbe projekciója a megadott síkgörbe, az evidens. A görbe záródik; az ívek mindegyikének csak egyszerű pontjai vannak, mert z lineárisan változik τ -val;

a szerkesztésnél tehát csak arra kellett ügyelni, hogy az egyazon $z_1 \leq z \leq z_2$ rétegbe kerülő ívek (pl. a $-1 \leq z \leq 0$ rétegbe kerülő 1° és 6° ívek) ne messék egymást.

Ugyanígy járunk el az $n=2$ esetben is, csak ilyenkor a 7° ív gyanánt $x = f_2(1-\tau)$, $y = g_2(1-\tau)$, $z = \tau$ ívet vesszük.

Legyen most már $n=3$. A JORDAN-görbét ilyenkor a következő tíz ívből teszem össze, melyek mindegyikénél τ újra 0-tól 1-ig nő.

- 1° $x = \varphi_1(\tau)$, $y = \phi_1(\tau)$, $z = -\tau$;
- 2° $x = \varphi_1(1)$, $y = \phi_1(1)$, $z = -\tau - 1$;
- 3° $x = f_1(\tau)$, $y = g_1(\tau)$, $z = -\tau - 2$;
- 4° $x = f_1(1)$, $y = g_1(1)$, $z = \tau - 3$;
- 5° $x = \varphi_2(\tau)$, $y = \phi_2(\tau)$, $z = \tau - 2$;
- 6° $x = \varphi_2(1)$, $y = \phi_2(1)$, $z = \tau - 1$;
- 7° $x = f_2(1-\tau)$, $y = g_2(1-\tau)$, $z = \tau$;
- 8° $x = f_3(\tau)$, $y = g_3(\tau)$, $z = \tau + 1$;
- 9° $x = f_3(1)$, $y = g_3(1)$, $z = -\tau + 2$;
- 10° $x = f_1(1-\tau)$, $y = g_1(1-\tau)$, $z = m(\tau)$.

Egyetlen feladatunk az $m(\tau)$ függvényt úgy definiálni, hogy $m(0) = 1$, $m(1) = 0$ legyen, hogy $m(\tau)$ a $0 \leq t \leq 1$ időközben folyton kisebbdjék és hogy a 7° és 10° jelű ívek ne messék egymást.

6. E helyt alkalmasnak látszik a jelölések megváltoztatása és a feladat oly fogalmazása, mely a felhasználandó föltevéseket jobban hangsúlyozza:

Adva van két vonal:

$$x = f_1(\tau), y = g_1(\tau)$$

és

$$x = f_2(\tau), y = g_2(\tau), 0 \leq \tau \leq 1.$$

Mindkét vonalon $\tau=0$ ugyanazon P_1 , $\tau=1$ ugyanazon P_2 pontot szolgáltatja. P_1 és P_2 a görbék mindegyikének egyszerű pontjai, (tehát egymástól különbözők). A második görbén van olyan $\tau=\tau_0$ pont, mely az első görbének nem pontja.

Szerkesztendő oly $m(\tau)$ függvény, mely a $(0, 1)$ időközben folyton fogy 1-től 0-ig és a melynél az $x = f_1(\tau)$, $y = g_1(\tau)$, $z = \tau$ és $x = f_2(\tau)$, $y = g_2(\tau)$, $z = m(\tau)$ térgörbék nem metszik egymást.

A $\tau = 1$ pont az adott síkgörbék mindegyikének egyszerű pontja lévén, nullánál nagyobb távolságban van a második görbe $0 \leq \tau \leq \tau_0$ ívétől; ennél fogva az első görbe mindazon pontjai, melyek a második görbe $(0, \tau_0)$ ívére esnek, az első görbe egy $0 \leq \tau \leq v$, $v < 1$ ívén vannak. Hasonlóképp az első görbe mindazon pontjai, melyek a második görbe $\tau_0 \leq \tau \leq 1$ ívére esnek, az első görbének egy $u \leq \tau \leq 1$, $u < 0$ ívén vannak. Így az $x = f_1(\tau)$, $y = g_1(\tau)$, $z = \tau$ térgörbének oly pontja, melynek vetülete a második síkgörbe $(0, \tau_0)$ ívére esik, nem eshetik a $z = v$ sík fölé és oly pontja, melynek vetülete a második görbe $(\tau_0, 1)$ ívére esik, nem eshetik a $z = u$ sík alá. Ezért az $m(\tau)$ függvény a következőképp definiálható: Válasszunk egy ε értéket úgy, hogy a második görbe $(\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon)$ íve az első görbétől nullánál nagyobb távolságban legyen. Válasszunk továbbá egy V értéket, mely v -nél és $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb, de 1-nél kisebb, továbbá egy U értéket, mely u -nál is, $\frac{1}{2}$ -nél is kisebb, de nullánál nagyobb. Legyen

$$m(0) = 1, m(\tau_0 - \varepsilon) = V, m(\tau_0 + \varepsilon) = U, m(1) = 0$$

és legyen $m(\tau)$ lineáris a $(0, \tau_0 - \varepsilon)$, $(\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon)$, $(\tau_0 + \varepsilon, 1)$ időközök mindegyikében.

7. H. HAHN a «Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung» 1914. évi utolsó számában megadta, hogy mily (szükséges és elegendő) feltételek mellett tekinthető egy síkbeli pontthalmaz folytonos görbének. E kritérium fölhasználásával kimutatható:

Egy síkbeli pontthalmaz akkor és csak akkor projekciója egy térbeli JORDAN-görbének, ha a halmaz 1. legalább két pontból áll; 2. zárt; 3. összefüggő; 4. adva lévén ε , van olyan δ , hogy bármely két ponthoz, melyek távolsága kisebb, mint δ , tartozik a halmaznak egy zárt, összefüggő, a két pontot tartalmazó része, melynek átmérője kisebb ε -nál.

8. Érdemes megjegyezni, hogy a keresett (kinematikai) föltétel nem állhat abban, hogy a megadott φ és ψ függvények a $(0, 2\pi)$ intervallum egy darabján, pl. egy pont környezetében ilyen vagy amolyan természetűek. Adva lévén ugyanis a φ és ψ függvények a $(0, 2\pi - \varepsilon)$ darabon, lehet őket a $(2\pi - \varepsilon, 2\pi)$ darabon úgy definiálni, hogy kiegészítő függvény létezzék, de lehet őket úgy is definiálni a $(2\pi - \varepsilon, 2\pi)$ darabon, hogy kiegészítő függvény ne létezzék. Válasszunk pl. egy A pontot, mely nincs az $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi - \varepsilon$ görbén. Kössük össze A -t a $B(t=0)$ és $C(t=2\pi - \varepsilon)$ pontokkal; fussa be egy pont a $(2\pi - \varepsilon, 2\pi - \frac{\varepsilon}{2})$ időben a CA , a $(2\pi - \frac{\varepsilon}{2}, 2\pi)$ időközben az AB távolságot; az A pont a $(0, 2\pi)$ időben leírt zárt síkgörbének egyszerű pontja és így kiegészítő függvény létezik. Viszont eljárhatunk a következőkép is: Válasszunk egy k értéket $2\pi - \varepsilon$ és 2π között; legyen $\varphi(k) = \varphi(0)$ és $\psi(k) = \psi(0)$, továbbá legyen φ és ψ lineárisak a $(2\pi - \varepsilon, k)$ időben. A $(k, 2\pi)$ időközben φ és ψ definiáltassanak a

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{k(t-k)}{2\pi-k}\right)$$

és

$$\psi(t) = \psi\left(\frac{k(t-k)}{2\pi-k}\right)$$

egyenletek által. Az így a $0 \leq t \leq 2\pi$ időre definiált φ és ψ függvényekben t -re alkalmazható oly folytonos, monoton transformatio: $t = \mu(\tau)$, melynél a $\varphi[\mu(\tau)]$ és $\psi[\mu(\tau)]$ függvényeknek a π közös periodusa lesz. Ezért e függvényeknek és velük a $\varphi(t)$, $\psi(t)$ függvénytárnak sincs kiegészítő függvénye.

Pál Gyula.

WEIERSTRASS EGY TÉTELÉNEK NÉMELY ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL.

WEIERSTRASS jól ismert tétele szerint adva lévén az $a \leq x \leq b$ darabon a folytonos $f(x)$ függvény és a pozitív ε szám, létezik oly $p(x)$ polinom, mely $f(x)$ -et ε pontossággal egyenletesen approximálja, vagyis melyre nézve

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Világos, hogy adott $f(x)$ -hez és ε -hoz nem csak egy, hanem akárhány megközelíthető soktag készíthető. Hiszen, ha $p_0(x)$ egy ilyen soktag, együtthatóinak elég kicsiny változásánál approximáló tulajdonsága megmarad. Akárhány $p(x)$ létező, természetesen fölvetődik a kérdés, van-e a $p(x)$ polinomok közt olyan, mely az előírt approximáción kívül még valami más, kívánatos tulajdonsággal is bír? Van-e például oly $p(x)$, melynek összes együtthatói *egész*¹ számok? Rögtön látható, hogy ily egész együtthatójú közelítő polinom nem mindig létezik. Vegyük pl. az $f(x) = \frac{x}{2}$ függvényt az $0 \leq x \leq 1$ darabon. Ha a $q(x)$ polinomnak együtthatói egész számok, akkor $q(1) =$ egész szám, és így

$$|f(1) - q(1)| \geq \frac{1}{2}.$$

Az $f(x) = \frac{x}{2}$ függvényhez tehát nem konstruálható egész együtthatójú közelítő polinom, mihelyt $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $a=0$ és $b=1$.

¹ Hogy van $p(x)$, melynek összes együtthatói *racióális* számok, az triviális.

Hogy ilyen primitív ellenvetésről ne kelljen külön beszélni, *feltesszük $f(x)$ -ről, hogy $f(x) = \text{egész szám}$, ha $x = \text{egész szám}$. E föltevést különben is valósággal oktrojálja a kérdés természetete.*

A kérdésre aligha lehet valami triviális gondolatmenet alapján feleletet adni. Viszont azonban igen egyszerű kimutatni, hogy *egész együtthatójú közelítő polinom igenis létezik, ha az*

$$a \leq x \leq b$$

intervallumra legfőlebb egy egész szám esik.

Hogy a tétel bizonyításánál esetek megkülönböztetése ne legyen szükséges és hogy a fogalmazást megkönnyítsük, járjunk el a következő módon:

Ha az (a, b) intervallumra legfőlebb egy egész szám esik, az egész intervallum bizonyára része egy

$$n - 1 < x < n + 1$$

nem zárt intervallumnak, hol n egész szám. Válasszunk egy

$$n - a \leq x \leq n + a$$

intervallumot, mely az

$$a \leq x \leq b$$

darabot tartalmazza és egészítsük ki valamiképp, de folytonosan $f(x)$ definícióját az $(n - a, n + a)$ darabra; természetes, hogy ha $x = n$ nem esett az (a, b) intervallumra, a kiegészítésnél ügyelnünk kell arra, hogy $f(n) = N$ egész szám legyen.

Definiáljuk most már a

$$-a \leq x \leq +a$$

darabon a $g(x)$ függvényt a

$$g(x) = f(x + n) - N$$

egyenlet által. Ha $p(x)$ polinom a $g(x)$ függvényt ϵ pontossággal adja a $(-a, +a)$ darabon, akkor a $[p(x - n) + N]$ polinom $f(x)$ -et ugyanily pontossággal adja az $(n - a, n + a)$ (tehát egyszersmind az (a, b)) darabon.

Tételünk tehát folyik a következő tételből:

I. Adva van a folytonos $g(x)$ függvény az $|x| \leq a$, $0 < a < 1$, darabon, melyre nézve $g(0) = 0$. Adva van továbbá egy pozitív ε szám. Akkor létezik oly $p(x)$ polinom, melynek együtthatói egész számok és a mely a $g(x)$ függvényt ε pontossággal adja meg.

E tétel majdnem közvetlen következménye a WEIERSTRASS-tétel egy másik általánosításának:

II. Adva van az $|x| \leq 1$ darabon a folytonos $g(x)$ függvény, melyre nézve $g(0) = 0$; adva van továbbá a pozitív ε szám és adva vannak a c_1, c_2, \dots, c_n együtthatók. Akkor létezik oly polinom, mely $g(x)$ -et ε pontossággal közelíti meg és a melynek kezdő együtthatói a megadott c_1, c_2, \dots, c_n számok.

E (II.) tétel bizonyítását a «Tôhoku Mathematical Journal» 1914. évi májusi számában közöltem. Mivel e folyóirathoz nehéz hozzájutni (és mivel néhány zavaró nyomdahiba is van a benne közölt bizonyításban), jobbnak tartom utalás helyett a bizonyítást itt megismételni.

Válasszunk mindenekelőtt egy oly pozitív $\rho < 1$ számot, hogy az $|x| \leq \rho$ darabon

$$|g(x) - (c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

legyen, a mi lehetséges, mert $g(0) = 0$. Utána definiáljunk egy folytonos $\varphi(x)$ függvényt a következőképen: Legyen

$$\varphi(x) = \frac{g(x) - (c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)}{x^{n+1}} \quad (1)$$

a $-1 \leq x \leq -\rho$ és $\rho \leq x \leq +1$ darabokon; legyen $\varphi(0) = 0$ és legyen $\varphi(x)$ lineáris a $-\rho \leq x \leq 0$ és $0 \leq x \leq +\rho$ darabokon.

E $\varphi(x)$ függvényt approximáljuk az eredeti WEIERSTRASS tétel értelmében egy $q(x)$ polinommal $\frac{\varepsilon}{3}$ pontosságnyra; áll tehát a

$$|\varphi(x) - q(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

egyenlőtlenség.

A

$$p(x) = c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + x^{n+1} \cdot q(x)$$

polinom kezdő együtthatói az előírt számok és $p(x)$ tényleg ε pontossággal adja meg a $g(x)$ függvényt.

A $\varrho \leq x \leq 1$ (vagy $-1 \leq x \leq -\varrho$) darabon ugyanis a (2) jelű egyenlőtlenség, tekintve az (1) jelű egyenletet, így írható:

$$\left| \frac{g(x) - (c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)}{x^{n+1}} - q(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

vagy

$$\begin{aligned} |g(x) - (c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + x^{n+1}q(x))| &= \\ &= |g(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{3} |x^{n+1}| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

A $0 \leq x \leq \varrho$ (vagy $-\varrho \leq x \leq 0$) darabon így következtethetünk:

$$|g(x) - p(x)| \leq |g(x) - (c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)| + |x^{n+1} \cdot q(x)|. \quad (3)$$

De, mivel ϱ -t alkalmas módon választottuk:

$$|g(x) - (c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4)$$

Másképpen

$$|x^{n+1}q(x)| \leq \varrho^{n+1} \cdot \text{Max } |q(x)|. \quad (5)$$

Mivel $q(x)$ a $\varphi(x)$ függvényt $\frac{\varepsilon}{3}$ pontossággal adja, azért

$$\text{Max } |q(x)| \leq \text{Max } |\varphi(x)| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tekintve, hogy $|\varphi(x)|$ a $(0, \varrho)$ darabon folyton nő, e darabon,

$$\text{Max } |\varphi(x)| = |\varphi(\varrho)| = \left| \frac{g(\varrho) - (c_1\varrho + c_2\varrho^2 + \dots + c_n\varrho^n)}{\varrho^{n+1}} \right|.$$

Ezért a $(0, \varrho)$ darabon

$$\begin{aligned} |x^{n+1}q(x)| &\leq \varrho^{n+1} \cdot \left[\frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{g(\varrho) - (c_1\varrho + c_2\varrho^2 + \dots + c_n\varrho^n)}{\varrho^{n+1}} \right| \right] = \\ &= \frac{\varepsilon}{3} \varrho^{n+1} + |g(\varrho) - (c_1\varrho + c_2\varrho^2 + \dots + c_n\varrho^n)| < \frac{2}{3} \varepsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

A (3), (4) és (6) jelű egyenlőtlenségekből következik, hogy a (0, ρ) darabon is

$$|g(x) - p(x)| < \varepsilon.^1$$

E (II) tétel segítségével egy csapásra igazolható (I) alatti tételünk.

Válasszunk ugyanis oly pozitív egész n számot, hogy

$$a^{n+1} + a^{n+2} + \dots + a^{n+k} + \dots < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen. Utána szerkesszünk oly polinomot, mely $g(x)$ -et a $(-a, +a)$ darabon $\frac{\varepsilon}{2}$ pontossággal adja meg és melynek n első együtthatója nulla, a mi a (II) tétel értelmében lehetséges. Legyen e polinom

$$c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \dots + c_{n+k}x^{n+k}$$

és legyen γ_i a c_i -hez legközelebb eső egész szám. Akkor a

$$\gamma_{n+1}x^{n+1} + \gamma_{n+2}x^{n+2} + \dots + \gamma_{n+k}x^{n+k}$$

egész együtthatóju polinom már megfelel föltételeinknek. Ugyanis

$$\begin{aligned} & |g(x) - (\gamma_{n+1}x^{n+1} + \dots + \gamma_{n+k}x^{n+k})| \leq \\ & \leq |g(x) - (c_{n+1}x^{n+1} + \dots + c_{n+k}x^{n+k})| + \\ & + |(c_{n+1}x^{n+1} + \dots + c_{n+k}x^{n+k}) - (\gamma_{n+1}x^{n+1} + \dots + \gamma_{n+k}x^{n+k})| < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + a^{n+1} + a^{n+2} + \dots + a^{n+k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pál Gyula.

¹ FEJÉR professor úr szives volt a tételnek más, mélyreható bizonyítását velem közölni, mely a komplex tartományra átvive, érdekes új eredményekre vezet.

A tételnek közvetlen következménye, hogy bármely folytonos függvény előállítható, mint egy (általán divergens) hatványsor bizonyos szeletsorozatának egyenletes határértéke. Sőt FEKETE MIHÁLY úr — LUKÁCS FERENCZ úr egy megjegyzésének felhasználásával — a következő érdekes eredményre jutott: létezik olyan $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \dots$ hatványsor, mely a $(-1, +1)$ közben folytonos, az $x=0$ helyen eltűnő függvények összességét «előállítja» a következő értelemben: ha $f(x)$ egy tetszőleges, a $(-1, +1)$ közben folytonos, az $x=0$ helyen eltűnő függvény, kiragadható a fenti hatványsor részletösszegeinek sorozatából olyan részsorozat, mely a $(-1, +1)$ intervallumban egyenletesen konvergál $f(x)$ -hez.

A Matematikai és Physikai Társulat XXII. rendes közgyűlése.

A Matematikai és Physikai Társulat XXII. rendes közgyűlését 1915. május hó 12-én tartotta meg a következő napirenddel:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1915-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Tisztikar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

I. Elnöki megnyitó.

Báró Eötvös Loránd elnök megnyitja az ülést és üdvözlí a megjelent tagokat. Meleg szavakkal emlékezik meg Társulatunk azon tagjairól, kik a harcztéren küzdenek. Közöttük van egyik titkárunk, Zemplén Győző is. A társulat tagjait munkára serkenti és reméli, hogy «azok a nemzetek, a melyek most egymás ellen küzdenek, megint vállvetve fognak a kultúra épületén dolgozni».

A jegyzőkönyv vezetésére Kopp Lajos, hitelesítésére Farkas Gyula és Rybár István tagtársakat kéri fel.

II. Titkári jelentés Fejér Lipóttól.

Tisztelt Közgyűlés!

Van szerencsém a következőkben, mint helyettes *ügyvivő*-titkár, a «Matematikai és Physikai Társulat» 1914. évi életéről az idetartozó adatok felsorolásával jelentést tenni.

A «Matematikai és Physikai Lapok» huszonharmadik évfolyama megjelent 24 ívnyi terjedelemben. E kötet 19 önálló és ismertető cikket tartalmaz, melyek közül 13 matematikai, és 6 physikai tárgyú. Föl-eleveníti továbbá a régi rovatokat és újakat indít meg, bő tartalommal.

A kötetet Zemplén Győző és a jelentésttevő szerkesztették, mint a Társulat titkárai. Ez az első kötet, melyet a Társulat megítéző megbízása alapján kibocsáthattunk. Nehéz időkben kezdtük meg szerkesztői tevékenységünket, de munkánk mégis könnyű volt, mert nagyérdemű elődeink a titkári tisztségben mindent a legjobban megszervezték.

Jelentem a tisztelt Közgyűlésnek, hogy *Zemplén Győző* kitűnő szerkesztőtársam a háború eleje óta hadbavonult. Az ő távolléte Társulatunkra érzékeny veszteséget jelent. Addig is, míg majd, legnagyobb örömeinkre, körünkben újra meg fog jelenni, a «Math. és Phys. Lapok» fizikai részét, a választmány kérelmére, *Mikola Sándor* tagtárs úr szíves szerkeszteni. Az ügyvivő-titkári teendőinkben pedig a jelentésttevő igyekszik őt helyettesíteni.

Az 1914. évben a Társulat 10 előadó ülést tartott, melyeken 16 előadást hallottunk. Ezek között volt 8 matematikai és 8 fizikai tárgyú. Megemlítem, hogy ez évben vendégünk is volt. *Dr. Ehrenhaft Felix* bécsi egyetemi tanár előadást tartott Társulatunkban »az elektromosság szerkezetéről« címen.

A XXI. matematikai tanulmányversenyen 66 versenyző vett részt és 28 dolgozat érkezett be. Az első «br. Eötvös Loránd díj»-at *Zigány Ferencz*, a másodikat *Prónai Jenő* nyerte el.

A Math. és Phys. Társulatnak 430 tagja van. Ezek közül 216 budapesti, 214 vidéki. Az alapító tagok száma 17.

Lapunkra 107-en fizettek elő.

A Magyar Tudományos Akadémia, illetőleg annak Matematikai és Természettudományi bizottsága ezidén is támogatta 2000 koronával Társulatunkat. E hathatós anyagi támogatásért hálás köszönetünket fejezzük ki.

Szomorú kötelességet teljesítek, midőn értesítem a tisztelt Közgyűlést több érdemes tagtársunk elhunytáról. Elvesztettük *Andor Tivadar*, *Danch Ferencz*, *Hassák Vidor*, *Horváth Kálmán*, *Szabó Péter*, *Wartha Vincze*, *Terlanday Emil* és *Vámos Rezső* tagtársainkat. *Bartonic Emil* és *Homor Ernő* tagtársaink a harcmezőn haltak hősi halált. Őrizzük meg emléküket kegyeletesen!

Titkári működésemben a Társulat sok tagja úgy a tudományos, mint az adminisztratív részben nagy segítséget nyújtott. Fogadják ezért itt, a tisztelt Közgyűlés előtt, hálás köszönetem kifejezését.

Kérem a tisztelt Közgyűlést, szíveskedjék jelentésemet tudomásul venni. Budapest, 1915 május 12-én.

Fejér Lipót,
helyettes ügyvivő-titkár.

BEVÉTELEK	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
1913. évi zárószámadási maradvány	1028	18	1028	18
Folyó és köv. évi tagdíjak	2600	—	1420	—
Hátralékos tagdíjak	2000	—	1110	—
Tagsági díjak megváltása	—	—	240	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési díjak	300	—	200	—
Előfizetési díjak	800	—	816	—
Nyomtatványokból	200	—	18	—
Kamatok	600	—	639	57
			7471	75

Vagyon

VAGYON	1913. év végén		1914. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	1700	—	1940	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2600	—	2600	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Forgó tőke:				
Készpénz	45	67	263	87
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	301	71	194	61
Első hazai takarékpénztári betét	200	—	200	—
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	432	—	371	—
Tagdíjhátralékok	4500	—	4600	—
Föl nem vett hirdetési díjak	200	—	100	—
Nyomtatványokban	700	—	700	—
	20936	18	21226	28

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk.

Balog Mór s. k. Bogyó Samu s. k.
a közgyűlés részéről.

1915. évi költség-

BEVÉTELEK	1914. évi		1915. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Zárószámadási maradvány	1028	18	1078	28
Folyó és köv. évi tagdíjak	2600	—	2600	—
Hátralékos tagdíjak	2000	—	2000	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési díjak	300	—	200	—
Előfizetési díjak	800	—	1000	—
Nyomtatványokból	200	—	200	—
Kamatok	600	—	600	—
Hiány	1260	88	1522	51
	10789	06	11200	79

árószámadások.

KIADÁSOK	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség a múlt évre	4350	70	3000	—
a folyó évre	3000	—	—	—
Írói tiszteletdíjak a múlt évre	578	36	289	62
a folyó évre	2000	—	1815	99
Expeditió- és irodai költségek	700	—	889	86
Középiskolai tanulóverseny	160	—	158	—
Az alaptőkéhez csatoltatott	—	—	240	—
Pénztári maradvány a) készpénzben	—	—	263	87
b) takarékp. betétben	—	—	814	41
			7471	75

nérleg.

TEHER	1913. év végén		1914. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	4350	70	5674	28
Írói tiszteletdíjak	578	36	566	51
A folyórat XXIII. (ill. XXII.) évf. 6—8. számá- nak nyomdaköltsége	1403	59	861	31
Tiszta vagyon	14603	53	14124	18
	20936	18	21226	28

Kelt Budapesten, 1915. május 8-án.

Fejér Lipót s. k.
titkár.

Beke Manó s. k. Rátz László s. k.
a választmány részéről.

előirányzat.

KIADÁSOK	1914. évi		1915. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség a múlt évre	4350	70	5674	28
a folyó évre	3000	—	2000	—
Írói tiszteletdíjak a múlt évre	578	36	566	51
a folyó évre	2000	—	2000	—
Expeditió- és irodai költségek	700	—	800	—
Középisk. tanulóverseny	160	—	160	—
	10789	06	11200	79

Privorszky Alajos
pénztárnok

III. Pénztárnok jelentése, költségelőirányzat 1915-re és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Pénztárnok előterjeszti a fenti számadást és vagyonmérleget 1914-ről; az elnök pedig bemutatja a pénztárvizsgáló bizottság jelentését, mely szerint a pénzkezelés kifogástalan volt.

A közgyűlés ennek alapján a pénztárnoknak a felmentvényt megadja és a pénztárvizsgálóknak fáradozásukért köszönetet mond, felkérve Balog Mór és Bogyó Samu rendes tagokat, hogy a pénztárvizsgálói tisztelet a következő évre is vállalják el.

Pénztárnok előterjeszti a költségelőirányzatot az 1915. évre, melyet a közgyűlés elfogad.

IV. Tisztikar és választmányi tagok választása.

A közgyűlés szabályszerűen a következő *tisztikar*-t és *választmány*-t választja meg:

Tisztikar. Elnök: br. Eötvös Loránd, alelnökök: Károly Irén és Rados Gusztáv, titkárok: Fejér Lipót és Zemplén Győző, jegyzők: Kopp Lajos és Kürschák József, pénztárnok: Privorszky Alajos.

Választmányi tagok: Bartoniek Géza, Beke Manó, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, br. Harkányi Béla, Klupathy Jenő, Kövesligethy Radó, Mikola Sándor, Rátz László, Réthy Mór, Szily Kálmán, Tötössy Béla.

A Matematikai és Physikai Társulat XXII. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 9-én tartott XXII. tanulóversenyre Budapesten 44, Kolozsvárt 7 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejűleg zárt helyiségben, a társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen fölvett jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 33, Kolozsvárt 5 dolgozat adatott be. A múlt évben volt 66 versenyző és 28 dolgozat; ebben az évben volt 51 versenyző és 38 dolgozat.

A kitűzött tételek a következők voltak :

1. Jelentsenek A , B , C adott valós számokat; bebizonyítandó, hogy ezekhez mindig található oly ν szám, hogy

$$An^2 + Bn + C < n!,$$

valahányszor n a ν -nél nagyobb egész szám.

2. Valamely háromszög teljesen egy sokszög belsejében fekszik; bebizonyítandó, hogy a háromszög kerülete nem lehet nagyobb a sokszögénél.

3. Bebizonyítandó, hogy egy paralelogrammába írt háromszög területe nem lehet nagyobb a paralelogramma területének felénél.

A versenydolgozatok előzetes megbíráását Rátz László volt szíves vállalni. A teljes bírálóbizottság határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

Jegyzőkönyv

a XXII. matematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok elbírálása ügyében 1915 okt. 31-én tartott bizottsági ülésről.

Jelen vannak: Rados Gusztáv bizottsági elnök, Beke Manó, Éber Jó-

zsef, Fejér Lipót, Kopp Lajos, König Dénes, Kürschák József és Rátz László előadó.

Rátz László előadó jelentésének meghallgatása után a bizottság a következő egyhangú határozatot hozta:

A bírálóbizottság az első «br. Eötvös Loránd díj»-at *Boskovitz Alfréd*-nak ítéli oda, a ki a budapesti V. kerületi állami főgymnáziumban Virág Oszkár tanítványa volt. Ő volt az egyedüli versenyző, a ki mind a három feladatot hibátlanul oldotta meg. Különösen kiemelendő a második feladat megoldása, mely szép geometriai tehetségről tesz tanuságot.

A második díjat a bizottság *Krbek Ferencz*-nek ítéli oda, a ki a kalocsai főgymnáziumban Roznovszky János S. J. tanítványa volt. Ő az első feladatot a dolog velejének megfelelő legrövidebb úton oldotta meg és a harmadik feladatot is helyesen oldotta meg. A második tétel bebizonyításánál azonban oly tétellel látszik támaszkodni, mely jóval bonyodalmasabb a kitűzöttnél.

Dicsérettel emeli ki a bizottság *Peisner Gyula* és *ifj. Csengery Árpád* dolgozatait, a kik különösen az első tétel helyes megoldásával tűntek ki.

A folyó évi november 11-én tartott választmányi ülés a bizottság e javaslatát egyhangúlag elfogadta és ezzel határozattá emelte.

*

A választmányi ülést követő előadó-ülésen báró *Eötvös Loránd* elnök a nyerteseknek átadja a jutalmat, buzdító szavak kíséretében, és kérve őket, hogy adják át tanáraiknak a Társulat üdvözlétét. Meleg szavakkal üdvözölte továbbá elnök úr hadbavonult titkárunkat, Zemplén Győzöt, ki rövid szabadságideje alatt, üléseinken megjelent.

Előadásainkról.

A Matematikai és Physikai Társulat előadó-ülésein a következő előadásokat hallottuk:

1914 április 30. RYBÁR ISTVÁN: A teljes fényvisszaverődés abszolút fázisváltozásának kísérleti megfigyelése.

1914 november 26. KÖNIG DÉNES: Graphok és determinánsok. — SELÉNYI PÁL: A hangsugárzás mechanizmusáról.

1914 december 10. FEJÉR LIPÓT: Trigonometrikus többtaguakról. — ANDERKÓ AURÉL: A Stefan-féle sugárzási állandó egy meghatározási módjáról.

1915 január 28. JORDAN KÁROLY: Konvex görbékről.

1915 február 11. PÁL GYULA: Sík-és térbeli Jordan-görbékről.

1915 február 25. SCHRODT ISTVÁN: Barretter segélyével történő újabb aerodinamikai mérési eljárások.

1915 március 11. KÖNIG DÉNES: Graphok és halmazok. — BRODY IMRE: Thermodynamikai egyensúlyok.

1915 április 8. KÁRMÁN TÓDOR: Szilárd testek fajhőjének statisztikai elmélete.

1915 április 22. DÁVID LAJOS: Transzcendens függvények algebrai elmélete. — GRUBER NÁNDOR: Az elektromos vezető ellenállásának változása a vezető alakváltozásával.

1915 május 12. EGERVÁRY JENŐ: Minimum-problémák konvex adatok esetében. — RYBÁR ISTVÁN: A teljes fényvisszaverődés phasisváltozásai kettősen törő közegekben.

1915 november 11. DÁVID LAJOS: A polygonális görbékről. — MIKOLA SÁNDOR: Kondenzátorok rezgéseinél keletkező elektromos sugarakról.

1915 november 25. FARKAS GYULA: A relativitás elvéről.

1915 december 9. HOOR-TEMPIS MÓR: A művelt nemzetek mechanikai munkaszükséglete és az elektromos munkaelosztás.

A Matematikai és Fizikai Társulat XXII. tanulóversenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Boskovitz Alfréd dolgozata.

I. Jelentsenek A , B , C adott valós számokat; bebizonyítandó, hogy ezekhez mindig található oly ν szám, hogy

$$An^2 + Bn + C < n!,$$

valahányszor n a ν -nél nagyobb egész szám.

Jelentse k a $\frac{B}{2A}$ és $\sqrt{\frac{C}{A}}$ számok közül a nagyobbikat; akkor

$$An^2 + Bn + C = A \left[n^2 + 2 \frac{B}{2A} n + \left(\sqrt{\frac{C}{A}} \right)^2 \right] \leq A(n+k)^2. \quad (1)$$

A k szám változatlan marad, akárhogyan változik is az n . Legyen azért

$$n > A - k;$$

akkor

$$A < n + k$$

és

$$A(n+k)^2 < (n+k)^3. \quad (2)$$

Ha n -et esetleg tovább növeljük, akkor mindenesetre elérhetjük, hogy

$$n > k;$$

akkor pedig

$$(n+k)^3 < 8n^3. \quad (3)$$

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek.

Most n -et esetleg még tovább növelve, kielégítjük az

$$n > 8$$

egyenlőtlenséget is, s akkor

$$8n^3 < n^4 < n^{\frac{n}{2}}. \quad (4)$$

Végül bebizonyíthatjuk, hogy

$$n^n < (n!)^2 \quad \text{vagy} \quad n^{\frac{n}{2}} < n!. \quad (5)$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= [1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) (n-1) \cdot n] \cdot [n \cdot (n-1) (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1] \\ &= (1 \cdot n) (1 \cdot n) (2 (n-1)) (2 (n-1)) (3 (n-2)) (3 \cdot (n-2)) \dots \end{aligned}$$

A jobboldalon álló szorzatnak n tényezője közül $(1 \cdot n)$ és $(1 \cdot n)$ a legkisebbek, mert az

$$l((n+1)-l) = (n+1)l - l^2$$

függvény $l=1$ -től $l=\frac{n+1}{2}$ -ig folyton növekszik. Ebből következik hogy

$$(n!)^2 > (1 \cdot n)^n = n^n,$$

vagyis az (5) alatti egyenlőtlenség csakugyan helyes.

Az (1), (2), (3), (4) és (5) alatti egyenlőtlenségekből pedig következik, hogy

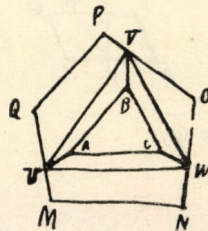
$$An^2 + Bn + C < n!,$$

hacsak n nagyobb a $\frac{B}{2A}$, $\left| \sqrt{\frac{A}{C}} \right|$, $\frac{A}{2}$ és 8 számok mindegyikénél, vagyis hogy:

a keresett n szám nem egyéb, mint a fenti számok **legnagyobbika**.

II. Valamely háromszög teljesen egy sokszög belsejében fekszik; bebizonyítandó, hogy a háromszög kerülete nem lehet nagyobb a sokszögénél.

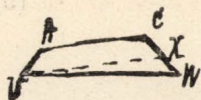
Legyen a háromszög ABC , a sokszög $MNOP \dots$ és kössük össze a háromszög csúcsait a sokszög kerületén levő olyan U , V és W pontokkal, hogy az UAB , UAC , VBA , VBC , WCA , WCB szögek tompaszögek legyenek. Ezt mindig megtehet-



jük, mert a háromszög szögei 0° és 180° között, az ABC , BCA , CAB külső szögek 180° és 360° között, s így pl. azoknak a fele 90° és 180° között fekszenek.

Már most az $UVW\Delta$ oly háromszög, melynek csúcsai a sokszög kerületén fekszenek és minden egyes oldala (tehát a kerülete is) nagyobb az $ABC\Delta$ megfelelő oldalánál (kerületénél).

Ezt pl. az AC és UW oldalakra a következőképen bizonyítjuk:



Ha $UX \parallel AC$ az $ACXU$ négyszög belsejében van, akkor az $ACXU$ trapéz hegyesszögeinél fekvő $UX > AC$ és az $UXW\Delta$ tompaszögével szemben fekvő $UW > UX$; tehát $UW > AC$.

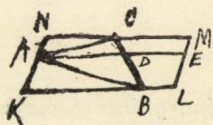
Epígy $UV > AB$ és $VW > BC$.

Viszont az $UVW\Delta$ kerülete kisebb a sokszög kerületénél, mert pl. az UV egyenes rövidebb minden más az U -t és V -t összekötő útnál, s így a sokszögnek az U és V közötti részénél is; annál inkább kisebb az $ABC\Delta$ kerülete a sokszög kerületénél.

III. Bebizonyítandó, hogy egy paralelogrammába írt háromszög területe nem lehet nagyobb a paralelogramma területének a felénél.

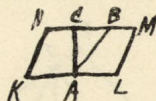
Három esetet különböztetünk meg:

a) Ha a háromszög csúcsai a paralelogramma különböző oldalain fekszenek, akkor húzzunk a háromszögnek a paralelogramma üres



oldalával (LM -el) szembenfekvő csúcsából (A -ból) párhuzamost a másik két (KL és MN) oldalával ($AE \parallel KL \parallel MN$); akkor a feladat megoldása vissza van víve a b) esetre.

b) Ha a háromszög két csúcsa a paralelogramma ugyanazon oldalán fekszik, a harmadik csúcs a szembenfekvő oldalon, akkor a háromszög magasságát m -el, alapját a -val és területét



t -vel, a paralelogramma megfelelő alkatrészeit M , A és T -vel jelölve, látjuk, hogy

$$\begin{aligned} a &\leq A \\ m &= M \end{aligned}$$

és így

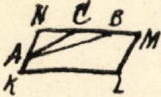
$$\frac{am}{2} \leq \frac{AM}{2},$$

vagy

$$t \leq \frac{1}{2} T. \quad \text{Q. e. d.}$$

$$\left(\text{Az } a) \text{ esetben } t_1 \leq \frac{T_1}{2}; t_2 \leq \frac{T_2}{2} \text{ és így } t_1 + t_2 \leq \frac{T_1 + T_2}{2}, \text{ vagy } t \leq \frac{T}{2} \right).$$

c) Ha végül a háromszög két csúcsa a paralelogramma ugyanazon oldalán és a harmadik csúcs az egyik szomszédos oldalon fekszik, akkor a bizonyítás menete ugyanaz, mint a b) esetben, csak $m = M$ helyébe $m < M$ lép.



Tehát látjuk, hogy a paralelogrammába beírt háromszög területe minden esetben kisebb, vagy legfeljebb ugyanakkora, mint a paralelogramma területének a fele.

II. Krbek Ferencz dolgozata.

I. Kifejezésünket így is írhatjuk

$$n [An + B + (n - 1)!] + C < 0.$$

Ha sikerült bebizonyítanunk, hogy ha $n > \nu$

$$An + B - (n - 1)! < -\varepsilon_1 \quad (\text{a hol } \varepsilon_1 > 0)$$

tételünket is bebizonyítottuk. Utóbbi kifejezés ily alakban is írható.

$$(n - 1) [A - (n - 2)!] + A + B.$$

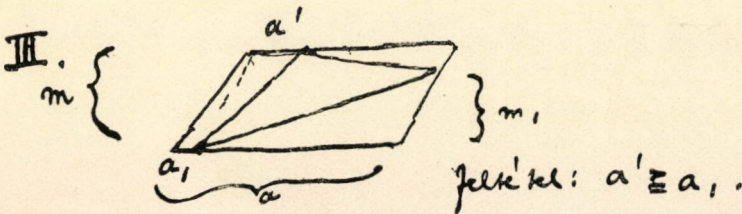
Tételünk bebizonyítására elégséges, ha kimutathatjuk, hogy $n > \nu_2$, akkor

$$A - (n - 2)! < -\varepsilon_2, \quad (\text{a hol } \varepsilon_2 > 0).$$

Ily ν_2 azonban megadható (mivel támaszkodhatunk a köv. tételre: bármely számnál van nagyobb egész szám). q. e. d.

II. Mivel ha úgy a sokszöget, mint a háromszöget bármikép projiciáljuk az a egyenesre, a háromszög projekciója a sokszögébe esik.

III.



A háromszög területe

$$= am - \frac{1}{2} [a_1 m + a' m + (a - a_1) m_1 + (a - a') (m - m_1)]$$

$$= am - \frac{1}{2} [ma + ma_1 + m_1 (a' - a_1)].$$

Az

$$ma_1 + m_1 (a' - a_1)$$

függvény minimuma 0.

Két esetet különböztetünk meg :

1.

$$a' = a_1,$$

akkor függvényünk redukálódik

$$ma_1.$$

Evidens, hogy e függvény minimuma az

$$a_1 = 0$$

esetben áll be, mikor is e minimum éppen a 0.

2. a' különbözik a_1 -től, mikor is a feladat elején álló feltétel miatt $a' - a_1 > 0$. Ennélfogva mivel m_1 és a_1 csakis nem negatív értéket vehet fel, a függvény minimuma az $m_1 = 0$, $a_1 = 0$ esetben áll be, mikor is 0.

A háromszög területének maximuma tehát az

$$am - \frac{1}{2} (am + f)$$

képlet szerint csakis $\frac{1}{2} am$ lehet, q. e. d.

